DE L'ÉVALUATION DU RISQUE DE CRÉDIT

François-Éric Racicot*

Département des sciences administratives
Université du Québec, Outaouais

Raymond Théoret

Département Stratégie des Affaires
Université du Québec, Montréal

RePAd Working Paper No. 0322005

* Adresse postale : François-Éric Racicot, Département des sciences administratives, Université du Québec en Outaouais, Pavillon Lucien Brault, 101 rue Saint Jean Bosco, Gatineau, Québec, Canada, J8Y 3J5.
Correspondance : francoiseric.racicot@uqo.ca.
Raymond Théoret, Département stratégie des affaires, Université du Québec à Montréal, 315 est, Ste-Catherine, Montréal, H2X-3X2. Correspondance : theoret.raymond@uqam.ca.
Ce papier est l'un des chapitres de notre prochain ouvrage intitulé *: Finance computationnelle et gestion des risques*.
This paper can be downloaded from RePAd.org : http://ideas.repec.org/p/pqs/wpaper/0322005.html Copyright 2005.

DE L'ÉVALUATION DU RISQUE DE CRÉDIT

Résumé

En recourant de plus en plus aux modèles à forme réduite, la théorie de l'évaluation du risque de crédit se distance de plus en plus de l'ingénierie financière traditionnelle qui donne la part belle aux modèles structurels. Bien qu'ils postulent l'absence d'arbitrage, les modèles à forme réduite reposent sur la distribution des pertes d'une entreprise dans un monde risque-neutre plutôt que sur un processus de diffusion. Il s'ensuit que la faillite n'est pas un processus prévisible comme dans le modèle original de Merton mais survient de façon subite. L'avenir de l'évaluation du risque de crédit semble être du côté des modèles hybrides qui combinent les modèles structurels et les modèles à forme réduite.

Abstract

By using more and more reduced-form models, the valuation theory of credit risk tends to move away from traditional financial engineering which rests on structural models. Although they postulate no arbitrage, reduced-form models are based on the distribution of losses of a firm in a risk-neutral world instead of on a diffusion process. Therefore, failure is not predictable as in the original Merton model but it is sudden. Hybrid models combining elements of structural and reduced-form models seem to be the orientation of future research in this area.

Mots-clefs : évaluation des actifs; risque de crédit; ingénierie financière.
Keywords : assets valuation; credit risk; financial engineering.
JEL : G12; G13; G33.

Introduction

Il n'y a encore que quelques années, l'octroi du crédit par une institution financière était une opération très sommaire. Les agents habilités à cette fin se contentaient d'étudier les rapports comptables de ceux qui sollicitaient des fonds en comparant leurs ratios financiers à ceux qui sont associés aux normes de bonne santé financière. On les classait alors dans une catégorie de risque qui permettait de fixer sur une base de jugement la prime de risque. L'opération s'arrêtait là. On ne voyait pas non plus une opération de prêt comme une constituante du portefeuille de prêts de l'institution prêteuse. On se souciait donc très peu de la diversification des portefeuilles de prêts.

Mais les choses devaient changer au cours des décennies 80 et 90 alors que la faillite de grandes entreprises menaça à ce point la santé financière de leurs bailleurs de fonds que certains se virent même forcés de déposer leur bilan. En 1988, le Comité de Bâle exigea que les banques détiennent un capital suffisant pour couvrir leur exposition au risque de crédit. Ce capital devait être au moins égal à 8% des actifs pondérés des banques par leur coefficient de risque respectif.

Chemin faisant, des modèles se sont développés pour analyser le risque de crédit d'une institution financière. Bien plus, des produits dérivés pour gérer le risque du crédit sont apparus sur les marchés hors bourse au début des années 90. Leur développement est fulgurant depuis, notamment du côté des swap de défaut de crédit[1]. Le but de ce chapitre est justement d'analyser les modèles proposés pour étudier le risque de crédit et de faire état de certains produits dérivés aptes à couvrir cette catégorie de risque.

Il existe deux grandes catégories de modèles qui visent à quantifier le risque de crédit, les buts de ces modèles étant grosso modo de calculer un écart de rendement entre la dette d'une entreprise risquée et une dette sans risque aux caractéristiques rapprochées choisie comme dette de

[1] Soit les *credit default swap* (CDS) en anglais.

référence ("benchmark"), cela dans l'esprit du modèle original de Merton (1974). Ces deux catégories sont: i) les modèles structurels qui voient l'évolution d'une entreprise comme un processus de diffusion. Dans ces modèles, le défaut survient quand la valeur de l'entreprise vient se situer en deçà de la valeur de la dette. Mais la principale carence de ces modèles est que le défaut ne peut survenir par surprise puisque la valeur de l'entreprise obtempère à un processus de diffusion continu; ii) les modèles à forme réduite. Ces modèles établissent un lien entre la valeur de la firme et le défaut. Le défaut est un événement imprévisible qui suit généralement un processus de Poisson et qui se traduit par une diminution subite de la valeur de l'entreprise. En vertu de cette approche, la faillite n'est pas un processus progressif comme cela est le cas dans les modèles structurels. L'analyse de la faillite en forme réduite distance sensiblement cette procédure des modèles dits structurels. Cette analyse repose en effet sur la distribution des pertes d'une entreprise et les dérivés du crédit sont évalués en conformité avec cette distribution. A l'instar des modèles structurels, les modèles à forme réduite postulent l'absence d'arbitrage, en ce sens que le prix juste d'un dérivé du crédit est établi en égalisant les avantages contingents actualisés de l'acheteur d'un produit dérivé aux pertes contingentes actualisées du vendeur du produit dérivé. Les deux approches se situent également généralement dans le monde risque-neutre bien qu'il puisse y avoir quelques écarts sur ce dernier point[2]. Enfin, les modèles hybrides participent de la nature des modèles structurels et des modèles à forme réduite. Le but de ce chapitre est de présenter les modèles d'analyse du risque de crédit qui ont marqué la littérature et de les appliquer aux produits dérivés du crédit les plus en vogue.

[2] Par exemple, la mesure omega du risque évalue un put dans le monde réel et non dans le monde risque-neutre.

1. Un modèle simple de risque de crédit[3]

Une institution financière dispose d'une série historique sur les pertes de son portefeuille de prêts. Elle peut donc s'en servir pour construire la distribution de ces pertes. L'espérance de la perte de crédit, notée par E(CL), dépend de trois facteurs :

i) la probabilité de défaut sur chaque prêt. C'est une variable Bernouilli qui prend une valeur de 1 s'il y a défaut et 0 autrement. Son espérance est égale à la probabilité de défaut ;

ii) l'exposition au crédit i. Si on associe crédit à emprunteur, l'exposition vis-à-vis d'un emprunteur donné représente le montant qui lui a été prêté ;

iii) le taux de perte sur un prêt. Il est égal à ($1-t_{rc}$), où t_{rc} représente le taux de recouvrement lors du défaut.

Les pertes sur prêts (CL) sont donc égales à :

$$CL = \sum_{i=1}^{N} b_i \times EC_i \times t_{pi}$$

avec N, le nombre de prêts accordés ; b_i, une variable de Bernouilli qui prend la valeur 1 s'il y a défaut et 0 autrement ; EC_i, le montant du prêt accordé au $i^{ème}$ emprunteur et t_{pi}, le taux de perte sur le prêt i qui est égal à : ($1-t_{rci}$). L'espérance de la perte est donc de :

$$E(CL) = \sum_{i=1}^{N} E(b_i) \times EC_i \times t_{pi} = \sum_{i=1}^{N} p_i \times EC_i \times t_{pi}$$

Supposons que l'espérance de la perte d'un portefeuille de prêts ait été estimée à 15 millions $ et que l'écart-type des pertes de ce portefeuille soit de 10 millions $. La pire perte qu'il puisse survenir avec une probabilité de 99% sur une base annuelle, si l'on suppose que la distribution des pertes obéit à une loi normale, est alors de : $2{,}33 \times 10\ millions\ \$ = 23{,}3\ millions\ \$$[4]. La perte non

[3] Dans cette section, nous imitons la démarche de Jorion (2003).

[4] C'est là une mesure relative de la VaR du portefeuille.

espérée est alors de : 23,3 – 15 = 8,3 millions \$[5]. C’est là le capital que doit détenir l’institution pour couvrir ses pertes. On nomme ce capital : CaR, soit l’acronyme de : *Capital at Risk*.

Le rendement que requiert une institution financière sur un prêt doit être suffisant pour couvrir la perte espérée et une rémunération normale du CaR. Une institution qui ne tiendrait compte que de l’espérance des pertes pour rémunérer ses prêts sous-estimerait donc le rendement de ses prêts.

Certes, le *pricing* risque-neutre ne prend en compte que l’espérance des pertes pour établir le rendement des prêts. Mais les probabilités risque-neutres ne sont pas égales aux probabilités objectives. Les probabilités risque-neutres sont en effet contaminées par des primes de risque qui incorporent le degré d’aversion au risque des investisseurs. Ces probabilités emmagasinent donc une rémunération implicite de la CaR. Les probabilités objectives n’emmagasinent pas une telle rémunération. C’est pourquoi il faut ajouter une rémunération explicite pour le CaR lorsqu’on utilise les probabilités objectives.

On peut formuler l’espérance de la perte de crédit d’un portefeuille de manière plus élégante en recourant au calcul intégral. E(CL) s’écrit alors :

$$E(CL) = \int (b \times EC \times t_p) \times f(b, EC, t_p) \times (db \times EC \times t_p)$$

Si les trois variables sont indépendantes, alors on peut écrire :

$$E(CL) = \int b \ f(b)\, db \times \int EC \ f(EC)\, dEC \times \int t_p \ f(t_p)\, dt_p$$

soit le produit des valeurs espérées des trois variables :

$$E(CL) = prob(défaut) \times E(EC) \times E(t_p)$$

[5] C’est là une mesure absolue de la VaR du portefeuille.

A titre d'exemple, si la probabilité de défaut est de 3%, l'exposition, de 100 millions $ et le taux de recouvrement de 40%, l'espérance de perte est de :

$$E(CL) = 0{,}03 \times 100 \times (1 - 0{,}40) = 1{,}8 \ million \ \$$$

La pire perte de crédit (WCL) au seuil c se définit de façon implicite comme suit :

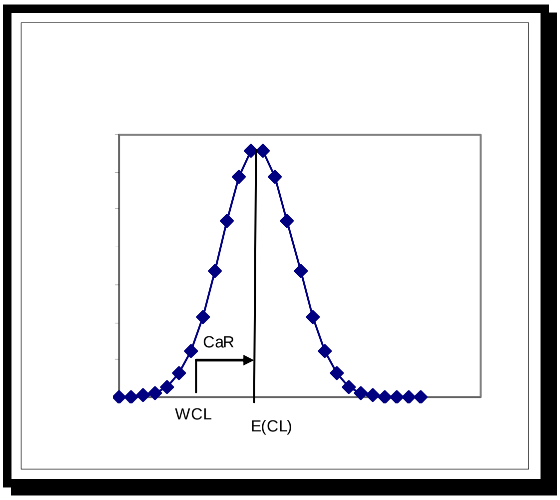
$$\int_{-\infty}^{WCL} f(x)dx = 1 - c = \alpha$$

avec f(x) la fonction de densité des pertes. La variable WCL est représentée à la figure 1. Par exemple, si c est égal à 95%, on cherche le WCL qui est la borne supérieure de la surface égale à 5%, sous la fonction de densité des pertes, comprise entre moins l'infini et WCL. La CaR, qui représente la perte non espérée, est égale à :

$$CaR = WCL - E(CL)$$

Figure 1

La CaR



2. Le risque de crédit dans le cadre de l'équation différentielle de Black et Scholes[6]

Nous voulons établir la distinction entre une obligation sans risque et une obligation qui comporte un risque de défaut dans le cadre de l'équation différentielle de Black et Scholes. Pour ce faire, nous devons dans un premier temps établir l'équation différentielle du prix de l'obligation sans risque de défaut. Cette démarche ressemble beaucoup à celle qui est généralement adoptée pour introduire les processus de sauts dans l'équation différentielle de Black et Scholes, un saut pouvant être également assimilé à un défaut.

Supposons que le taux d'intérêt, désigné par r, obéisse au processus d'Itô suivant :

$$dr = u(r,t)dt + w(r,t)dz \qquad (1)$$

La valeur de l'obligation prend la forme : V(r,t,T), t étant le temps présent et T représentant la date d'échéance de l'obligation. Pour construire l'équation différentielle de V(.), nous devons faire appel à une obligation d'échéance différente car le taux d'intérêt, soit le sous-jacent de l'obligation, n'est pas un actif transigé. On se donne donc deux obligations V_1 et V_2 qui ne diffèrent que par leur échéance. Leur échéance respective est de T_1 et T_2. On construit le portefeuille suivant de couverture :

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2 \qquad (2)$$

On fait appel au lemme d'Itô pour écrire l'équation différentielle de ce portefeuille :

$$d\Pi = \frac{\partial V_1}{\partial t}dt + \frac{\partial V_1}{\partial r}dr + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}dt - \Delta\left(\frac{\partial V_2}{\partial t}dt + \frac{\partial V_2}{\partial r}dr + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}dt\right) \qquad (3)$$

Dans cette équation, le facteur de risque est représenté par le taux d'intérêt. Il s'agit ici d'un risque de marché et non d'un risque de crédit. Le coefficient de dr est de :

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial r} - \Delta\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)$$

Pour éliminer le risque du portefeuille, il suffit donc d'annuler ce terme. Il en résulte la valeur suivante pour Δ :

[6] Pour rédiger cette section, nous suivons la démarche de : Wilmott (2000)

$$\Delta = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}}{\frac{\partial V_2}{\partial r}} \qquad (4)$$

En choisissant cette valeur pour Δ, on élimine donc toute incertitude du portefeuille. En remplaçant Δ par sa valeur donnée par l'équation (4) dans l'équation (3), on obtient :

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \left(\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t}}{\frac{\partial V_2}{\partial t}} \right) \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt \qquad (5)$$

Comme ce portefeuille est sans risque, il doit rapporter le taux d'intérêt sans risque r, c'est-à-dire :

$$d\Pi = r\Pi dt \qquad (6)$$

En substituant les équations (2) et (4) dans l'équation (6), on a :

$$d\Pi = r\Pi dt = r \left[V_1 - \left(\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t}}{\frac{\partial V_2}{\partial t}} \right) V_2 \right] dt. \qquad (7)$$

En égalisant les équations (5) et (7), on a :

$$\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - \left(\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t}}{\frac{\partial V_2}{\partial t}} \right) \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt = r \left[V_1 - \left(\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t}}{\frac{\partial V_2}{\partial t}} \right) V_2 \right] dt. \qquad (8)$$

En regroupant à gauche les termes en V_1 de l'équation (8) et ceux en V_2 à droite, on obtient :

$$\frac{\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - rV_1}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - rV_2}{\frac{\partial V_2}{\partial r}} \qquad (9)$$

Dans l'équation (9), le terme de gauche dépend de T_1 et non de T_2 et cela est l'inverse pour celui de droite. La seule façon que ce soit possible est que les deux côtés ne dépendent pas de T. En enlevant les indices dans l'équation (9), on obtient :

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} - rV}{\frac{\partial V}{\partial r}} = a(r,t) \qquad (10)$$

Appliquons la transformation de Girsanov suivante :

$$a(r,t) = w(r,t)\lambda(r,t) - u(r,t) \quad (11)$$

En substituant (10) dans (9), on a l'équation différentielle du prix de l'obligation :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial V}{\partial r} - rV = 0 \qquad (12)$$

On remarque que l'équation (12) est identique à celle de Black et Scholes sauf pour le coefficient de $\frac{\partial V}{\partial r}$ qui est égal à $(\mu - \lambda w)$ et non à r. En effet, le taux d'intérêt, soit le sous-jacent de V, n'est pas transigé. Il en résulte que le *drift* de l'équation du taux d'intérêt, soit l'équation (1), subsiste dans l'équation différentielle de V. La transformation de Girsanov de ce *drift* laisse également subsister le prix du marché du risque, λ, qui est multiplié par w, soit la volatilité du taux d'intérêt.

Pour trouver une solution unique à l'équation différentielle (12), nous devons imposer une condition finale et deux conditions aux bornes. La condition finale est de: V(r,T,T)=1. Les conditions aux bornes dépendent de u et w. Si un coupon K(r,t) est reçu dans l'intervalle dt, l'équation (12) devient :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial V}{\partial r} - rV + K(r,t) = 0$$

Nous introduisons maintenant le risque de défaut dans cette analyse. La probabilité de défaut entre t et (t+dt) est de pdt. Soit Z la valeur de l'obligation à coupon zéro sans risque de défaut de même échéance que l'obligation comportant un risque de défaut. La valeur V de l'obligation risquée s'écrit alors :

$$V = e^{p(T-t)} Z$$

Le rendement à l'échéance de l'obligation risquée est de :

$$-\frac{\log\left(e^{-p(T-t)}Z\right)}{T-t} = -\frac{\log Z}{T-t} + p$$

Le risque de défaut se traduit donc par l'ajout d'un écart (*spread*) p au rendement de l'obligation risquée.

Selon Wilmott (2000), ce modèle relève des processus de Poisson. Rien n'arrive durant un certain temps et puis il se produit un changement soudain d'état. On rappelle que l'équation différentielle de Black et Scholes modifiée par un processus de saut d'intensité λ ajoutait un écart λ au terme qui représente le terme d'escompte dans cette équation. Par analogie, le risque de défaut transforme l'équation différentielle (12) comme suit :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} - (r + p)V = 0 \qquad (13)$$

La probabilité de défaut a donc été ajoutée dans le coefficient du dernier terme de l'équation différentielle.

Pourquoi la probabilité de défaut p s'ajoute-t-elle dans l'équation différentielle (13) ? Il faut comprendre ici que le portefeuille d'arbitrage Π n'est couvert que contre les fluctuations du risque que représente le taux d'intérêt. Il n'est pas protégé contre le risque de défaut. C'est pour cette raison qu'une compensation s'ajoute à r dans le dernier terme de l'équation différentielle (13), compensation nécessaire pour rémunérer le risque de défaut.

Au lieu de considérer p comme fixe, on peut l'envisager comme une variable aléatoire. Son équation stochastique s'écrit :

$$dp = \gamma dt + \delta dz_2$$

On rappelle l'équation stochastique du taux d'intérêt :

$$dr = udt + wdz_1$$

ρ représente la corrélation entre les deux mouvements browniens z_1 et z_2. V dépend maintenant de trois variables : t, r et p. L'application du lemme d'Itô nous permet de trouver facilement l'équation différentielle de V :

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{2} \delta^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + \rho w \delta \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial p} + (u - \lambda w) \frac{\partial V}{\partial r} + \gamma \frac{\partial V}{\partial p} - (r + p)V = 0$$

avec comme condition finale : $V(r,p,T) = 1$[7].

3. Le modèle de Merton (1974) et ses extensions

Merton (1974) a proposé un modèle basé sur le levier financier d'une entreprise pour expliquer la prime de risque associée à la dette émise par celle-ci. Ce modèle est original car il fait appel à l'équation de Black et Scholes pour modéliser cette prime de risque.

Supposons qu'une entreprise ait émis n actions. Son bilan comporte également une émission d'obligations dont la valeur nominale est de F$. La valeur marchande globale des obligations de la compagnie est présentement de B_0 et le prix de ses actions se situe à S_0. La valeur marchande courante de cette firme s'établit donc à : $V_0 = B_0 + nS_0$. Soit V_T la valeur de la firme à l'échéance des obligations et B_T[8], la valeur marchande des obligations à l'échéance. À la date d'échéance des obligations, deux événements sont possibles :

1) L'entreprise est en mesure de rembourser la valeur nominale de ses obligations. On a alors : ($V_T > F$). La dette est alors repayée et les actionnaires touchent la valeur résiduelle de la firme, c'est-à-dire (V_T - F) ;

2) l'entreprise n'est pas en mesure de rembourser la valeur nominale de ses obligations. L'entreprise dépose alors son bilan. Les créanciers prennent possession de la firme et les actionnaires sont laissés pour compte.

Transposons le raisonnement que nous venons d'effectuer en termes de la théorie des options. En prêtant à la firme, les créanciers se sont véritablement portés acquéreurs de cette firme et ont vendu une option d'achat aux actionnaires. En effet, les créanciers deviendront propriétaires

[7] Pour plus de détails sur cette approche, on consultera : Wilmott (2000), chap. 55.

[8] Si l'entreprise est solvable à l'échéance des obligations, la valeur marchande des obligations (B_T) est évidemment égale à F, soit la valeur nominale de ces obligations.

de la compagnie si la firme fait faillite, et les actionnaires exerceront leur option d'achat à l'échéance des obligations si l'entreprise est alors en mesure de rembourser la valeur nominale des obligations qu'elle a émises.

Transposons le raisonnement que nous venons d'effectuer en termes d'équations. Selon que la firme est solvable ou non à l'échéance des obligations, la valeur de celles-ci est égale à :

$$B_T = V_T \quad si\ V_T < F$$
$$B_T = F \quad si\ V_T > F$$

On peut regrouper ces deux équations de la façon suivante :

$$B_T = MIN(F, V_T)$$

Cette expression signifie que B_T est égal au minimum des deux valeurs entre parenthèses : F ou V_T. Si F est supérieur à V_T, la firme est alors insolvable à l'échéance des obligations et la valeur marchande des obligations correspond à la valeur de la firme. Par ailleurs, si F est inférieur à V_T à l'échéance des obligations, la firme est alors solvable et la valeur marchande des obligations est égale à leur valeur nominale.

Cette dernière équation peut être réécrite comme suit :

$$B_T = V_T - MAX(V_T - F, 0)$$

En effet, si V_T est supérieur à F, le maximum est alors égal à (V_T - F) à la droite de l'équation et B_T est alors égal à F. Par ailleurs, si V_T est inférieur à F, le maximum est de zéro et B_T est alors égal à V_T. On retrouve donc les résultats de la fonction MIN.

C'est ici que l'option d'achat apparaît. En effet, on peut écrire :

$$C_T = MAX(V_T - F, 0)$$

Dans cette expression, C_T désigne la valeur terminale d'une option d'achat sur la valeur de la firme dont le prix d'exercice est de F.

Par substitution, on obtient :

$$B_T = V_T - C_T$$

et, en rapportant cette équation à la date actuelle (0), on obtient :

$$B_0 = V_0 - C_0$$

Selon cette équation, les créanciers contrôlent la valeur marchande de la firme, soit V_0, mais ont vendu une option d'achat ($-C_0$)[9] à ses actionnaires. C'est bien l'affirmation que nous avons formulée antérieurement et qui pouvait paraître suspecte au départ : les créanciers, et non les actionnaires, sont propriétaires de la compagnie ! Mais ce sont des propriétaires qui ont pieds et poings liés : ils ont en effet vendu une option d'achat aux actionnaires de la compagnie.

On peut également exprimer la valeur marchande des obligations d'une compagnie en termes d'options de vente. Reprenons l'équation qui nous a servi à exprimer la valeur marchande des obligations en termes d'options d'achat, soit :

$$B_T = MIN(V_T, F)$$

Cette équation peut être réécrite de la façon suivante :

$$B_T = F - MAX(F - V_T, 0)$$

Or, on sait que :

$$P_T = MAX(F - V_T, 0)$$

Dans cette expression, P_T désigne la valeur d'une option de vente écrite sur la valeur de la firme et dont le prix d'exercice est de F.

Par substitution, on obtient finalement :

$$B_T = F - P_T$$

et en ramenant cette équation à la période présente (0) :

[9] Dans cette équation, (+C) désigne une position en compte (*long position*) dans une option d'achat, c'est-à-dire que l'investisseur a acheté cette option. (-C) fait référence à une position à découvert (*short position*) dans une option d'achat, et correspond à la vente d'une telle option.

$$B_0 = Fe^{-r_f t} - P_0$$

Pour ramener F au temps présent, nous l'avons actualisé de façon continue au taux sans risque (r_f).

Cette équation offre une autre interprétation de la relation qui existe entre les créanciers et les actionnaires dans une entreprise. Dans cette nouvelle perspective, les actionnaires demeurent propriétaires de la firme. Ils ont emprunté la valeur présente de F et acheté une option de vente des créanciers pour se protéger du risque que présente la dette. Sans l'achat de cette option, les actionnaires n'auraient pas une responsabilité limitée. Cette option de vente représente une police d'assurance pour les actionnaires. Si, à l'échéance des obligations, la valeur de la firme s'avère inférieure à la valeur nominale des obligations, les actionnaires vont exercer leur option de vente et abandonner la firme aux créanciers.

La probabilité que la firme fasse défaut est évidemment égale à celle d'exercer l'option de vente, soit $N(-d_2)$. L'équation précédente qui établit la relation entre la valeur marchande de la dette et la valeur d'une option de vente nous permet d'écrire :

$$\boxed{\text{Prix d'une obligation risquée = prix d'une obligation sans risque - prix d'une option de vente}}$$

ou encore :

$$\boxed{\text{Prix d'une obligation risquée = prix d'une obligation sans risque - prime de risque}}$$

La prime de risque d'une obligation est donc assimilable à une option de vente. Les obligations risquées vont comporter une escompte relativement aux obligations sans risque, dont l'importance variera en fonction des facteurs qui influent sur le prix de cette option de vente.

Nous savons que le prix de l'option de vente européenne est égal à :

$$P = Fe^{-r_f t} N(-d_2) - VN(-d_1)$$

En substituant la valeur de cette option de vente dans l'équation du prix d'une obligation risquée, soit :

$$B = Fe^{-r_f t} - P$$

on obtient:

$$B = Fe^{-r_f t}\left[1 - N(-d_2) + \frac{VN(-d_1)}{Fe^{-r_f t}}\right]$$

Remplaçons l'expression entre crochets par K. On a :

$$B = Fe^{-r_f t} K$$

K étant le facteur d'escompte d'une obligation risquée. C'est le facteur par lequel il faut escompter l'obligation sans risque pour obtenir la valeur de l'obligation risquée.

Il est facile de passer de la dernière expression à la prime de risque, exprimée sous forme de rendement, d'une obligation. Comme la composition des intérêts est supposée continue, le taux de rendement de l'obligation risquée (r_B) est égal à l'expression suivante :

$$r_B = \ln\left(\frac{F}{B}\right) \times 100$$

La prime de risque de l'obligation est donc égale à :

$$\text{prime de risque} = (r_B - r_f) \times 100$$

Illustrons ces équations que nous venons d'écrire par l'exemple suivant. La valeur marchande d'une firme est de 40 millions \$ et la valeur nominale de sa dette se chiffre à 39,5 millions \$. Sa dette échoit dans un an. Le taux d'intérêt sans risque est de 10% et l'écart type de la valeur marchande de la firme est de 0,4. On demande de calculer la prime de risque des obligations de cette entreprise.

La dette de cette firme est évidemment risquée. En effet, son levier financier, à hauteur de 79 (39,5/0,5), s'avère très élevé. La prime de risque sur les actions de cette compagnie devrait être substantielle. C'est ce que nous révélera le calcul de cette prime de risque à partir de l'équation de Black et Scholes.

Pour calculer la valeur de l'option de vente incorporée dans la dette, nous nous servons du programme écrit en Visual Basic qui se retrouve au tableau 1. Sous les données de notre problème, la valeur du put s'établit à 5,61$.

Tableau 1 *Programme en Visual Basic du calcul du prix d'un put européen*

```
Function PutOptionBS(s, x, T, rf, sigma)
Num = Log(s / x) + (rf + 0.5 * sigma ^ 2) * T
d1 = Num / (sigma * Sqr(T))
PutOptionBS = -s * Application.NormSDist(-d1) + _
x * Exp(-T * rf) * Application.NormSDist(-d1 + sigma * Sqr(T))
End Function
```

La valeur de la dette sans risque est de :

$$39{,}5e^{-0{,}02} = 38{,}71$$

Comme la valeur de la dette risquée est égale à la différence entre la valeur de la dette sans risque et la valeur de l'option de vente, on a :

$$38{,}71 - 5{,}61 = 33{,}09$$

Le taux de rendement des obligations risquées est alors égal à :

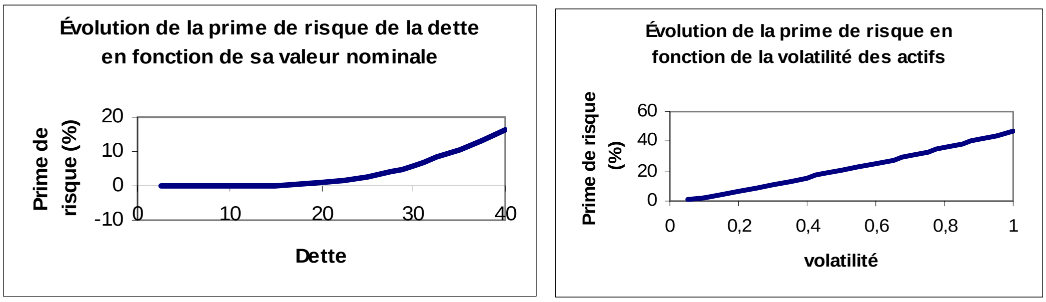
$$r_B = \ln\left(\frac{38{,}71}{33{,}09}\right) \times 100 = 17{,}67\%$$

La prime de risque sur de telles obligations est importante, et cela conformément à nos attentes. Elle est égale à :

$$17{,}67\% - 2\% = 15{,}67\%$$

Cette prime de risque est fortement conditionnée par le niveau de la valeur nominale de la dette et par l'écart type de la valeur marchande des actifs de l'entreprise. La figure 2 prend acte de ces relations. On remarquera incidemment sa forte sensibilité à la volatilité des actifs.

Figure 2



Black et Cox (1976) ont modifié le modèle de Merton de manière à autoriser la faillite de l'entreprise avant l'échéance de la dette. Leur modèle est donc du type « temps d'arrêt» ou « stopping time» qui est aussi celui des options américaines. A l'intérieur de leur modèle, la valeur V de l'entreprise obéit à l'équation différentielle suivante:

$$dV_t = V(r-\kappa)dt + V\sigma dz$$

avec κ le taux continu de paiement du dividende. Le taux d'intérêt est fixe, ce qui peut être vu comme l'une des faiblesses de ce modèle dont l'objectif est de modéliser le risque de crédit.

Contrairement au modèle de Merton (1974), le temps auquel survient la faillite n'est pas fixé à l'échéance de la dette mais est une fonction du temps. La période τ à laquelle survient le défaut est modélisée par l'équation suivante:

$$\tau = \inf\{t > 0 : V(t) \le K(t)\}$$

où inf signifie «infimum». C'est-à-dire que l'on recherche la période la plus rapprochée pour laquelle la valeur V(t) de l'entreprise se situe en-dessous de la barrière K(t) qui déclenche la faillite. Certains auteurs préfèrent écrire l'équation précédente comme suit:

$$\tau = \min\{t > 0 : V(t) \le K(t)\}$$

Le modèle de Black et Cox permet de prendre en compte différentes catégories de dettes qui diffèrent selon leur degré de séniorité au plan du remboursement. Longstaff et Schwartz (1995) ont donné plus de réalisme au modèle de Black et Cox en rendant le taux d'intérêt stochastique. Le modèle de taux d'intérêt utilisé fut emprunté à Vasicek (1977).

4. Modélisation dynamique de la probabilité de défaut : les probabilités de transition

Avant d'introduire les matrices de transition, il convient d'établir une distinction entre le rendement promis d'une obligation et son rendement espéré.

Le rendement promis d'une obligation est son rendement à l'échéance, dit encore «taux de rendement interne». Lors de son calcul, l'on suppose que le taux de défaut des cash-flows de l'obligation est nul. L'émetteur de l'obligation est solvable et remboursera à coup sûr les coupons de l'obligation de même que sa valeur nominale.

Supposons maintenant que le taux de défaut ne soit pas nul. Nous voulons calculer le rendement espéré d'une obligation d'un an dont le taux annuel du coupon est de C et dont la valeur nominale est de VN. Il existe une probabilité égale à π que l'émetteur ne soit pas en défaut au cours de l'année. λ représente le taux de recouvrement de la valeur nominale s'il y défaut. Le cash-flow espéré de fin d'année pour l'obligation est donc de : $\left[\pi(1+C)VN+(1-\pi)\lambda F\right]$. Connaissant le prix de l'obligation P, on peut calculer le taux de rendement espéré $\bar{r}$:

$$\bar{r}=\frac{\left[\pi(1+C)VN+(1-\pi)\lambda F\right]}{P}-1$$

Certes, le taux de rendement espéré est inférieur au taux de rendement promis puisque ce dernier taux repose sur la certitude que tous les paiements de l'obligation auront lieu. Il reste qu'à l'équilibre, le taux de rendement espéré devra être proportionné à la probabilité de défaut et à la proportion non remboursée des cash-flows de l'obligation, ces deux facteurs représentant le risque de crédit de l'obligation. Plus ces deux facteurs de risque sont importants, plus le rendement espéré devra l'être également.

Les entreprises qui émettent des obligations se voient attribuer une cote par une agence de notation. Les agences les plus connues aux Etats-Unis sont Moody's et Standard and Poor's. Nous supposons ici qu'il n'existe que quatre cotes, par ordre croissant de risque : A, B C et D, la dernière cote correspondant au défaut de paiement. À partir de ces cotes, nous définissons la matrice de transition de transition qui se retrouve au tableau 2.

Tableau 2 *Matrice de transition*

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{AA} & \pi_{AB} & \pi_{AC} & 0 \\ \pi_{BA} & \pi_{BB} & \pi_{BC} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les probabilités π_{ij} indiquent la probabilité que, dans une période, l'obligation va se mouvoir de la cote i à la cote j. Ces probabilités sont conditionnelles puisque la cote de départ est i. Pour mieux fixer les idées, introduisons des nombres dans la matrice de transition (tableau 2). Comme ce sont des probabilités, la somme des nombres de chaque ligne doit être égale à 1.

Tableau 3 *Matrice de transition d'une entreprise*

	A	B	C	D
3	0,98	0,02	0	0
4	0,03	0,92	0,02	0,03
5	0,01	0,12	0,7	0,17
6	0	0	0	1

Selon la matrice du tableau 3, si la cote de l'entreprise est de A, la probabilité qu'elle soit encore cotée A dans une période s'établit à 0,98. Il y a par ailleurs une probabilité de 0,02 que cette entreprise passe à la cote B dans une période, conditionnellement à sa cote A dans la période courante. Selon la matrice de transition, il est impossible qu'une entreprise cotée A à la période actuelle passe aux cotes C et D dans une période.

Supposons que les périodes soient des années. Nous voulons maintenant déterminer la probabilité cumulative qu'une entreprise cotée i à la fin de la première année ait migré dans la cote j à la fin de la seconde année. Nous allons supposer que les probabilités de transition obéissent à une chaîne de Markov. Autrement dit, les migrations d'une cote à l'autre sont indépendantes d'une période à l'autre. Seulement les valeurs présentes importent dans un processus de Markov.

Prenons l'exemple de l'entreprise qui a une cote B au tableau 3 et calculons la probabilité qu'elle fasse défaut à la fin de l'année 2. Il y a trois avenues pour elle d'être en défaut à la fin de l'année 2. Elle peut avoir migré à la cote A à la fin de l'année 1 et être en défaut à la fin de l'année 2. La probabilité d'une telle migration est de[10] :

$$p(D_2|A_1) \times p(A_1) = 0{,}03 \times 0 = 0$$

Selon le tableau 3, il existe en effet une probabilité de 0,03 que l'entreprise migre de B à A à la fin de l'année 1. Or, si elle se trouve dans cette position à la fin de l'année 1, il est impossible qu'elle soit en défaut à la fin de l'année 2.

Il y a deux autres voies par lesquelles B peut se trouver en défaut à la fin de la seconde année. Elle peut être demeurée à la cote B à la fin de l'année 1 et avoir migré à D à la fin de l'année 2. Ou encore, elle peut avoir migré à C à la fin de l'année 1 et être entrée en défaut à la fin de l'année 2. La probabilité totale de ces trois mouvements est donc de :

$$\begin{aligned}&[p(D_2|A_1) \times p(A_1)] + [p(D_2|B_1) \times p(B_1)] + [p(D_2|C_1) \times p(C_1)] = \\ &(0 \times 0{,}03) + (0{,}03 \times 0{,}92) + (0{,}17 \times 0{,}02) = 0{,}031\end{aligned}$$

Ce calcul représente la probabilité transitoire (marginale) pour l'entreprise de cote B à l'année 1 d'être en défaut à l'année 2. La probabilité cumulative s'obtient en additionnant à cette probabilité

[10] On applique ici la règle de Bayes, c'est-à-dire : $p(D_2|A_1) = \dfrac{p(A_1 \cup D_2)}{p(A_1)}$

celle reliée à son défaut à l'année 1, soit 3% selon le tableau 3. La probabilité cumulative est donc de 6,1%.

Il existe une façon simple de calculer les probabilités cumulatives de chaque année. En effet, pour calculer les probabilités cumulatives de la deuxième année, il suffit de mettre la matrice de transition au carré, c'est-à-dire de la multiplier par elle-même. On obtient alors Π^2 :

	A	B	C	D
10	0,961	0,038	0,0004	0,0006
11	0,0572	0,8494	0,0324	0,061
12	0,0204	0,1946	0,4924	0,2926
13	0	0	0	1

Comme on peut le constater dans la matrice Π^2, la probabilité cumulative que l'entreprise de cote B fasse défaut à la fin de l'année 2 est de 6,1%, ce qui correspond bien au calcul précédent. Cette probabilité correspond à la probabilité de la première année à laquelle s'ajoute la probabilité transitoire de la deuxième année. Pour obtenir les probabilités cumulatives de la troisième année, il suffit d'élever au cube la matrice transitoire Π. Et ainsi de suite.

Les probabilités marginales de chaque année, c'est-à-dire les accroissements des probabilités cumulatives, diffèrent selon les cotes. Les probabilités marginales des cotes élevées augmentent avec le temps, ce qui se passe de commentaires. Tandis que celles des cotes faibles augmentent durant les premières années puis tendent à diminuer par la suite. Selon Jorion (2003), il faut voir là un effet de survie ou de retour vers la moyenne. Une entreprise cotée faiblement et qui est passée au travers de ses premières années a d'autant plus de chances de survivre par la suite. D'où la diminution ultérieure de sa probabilité marginale de défaut.

La première utilité des matrices de transition est de renseigner sur les probabilités de défaut. Une autre est de calculer les cash-flows espérés d'un portefeuille de prêts et d'estimer la C-VaR[11],

[11] Nous mettons un trait d'union pour distinguer la C-VaR de la CvaR, ce dernier acronyme étant réservé à la VaR conditionnelle.

soit la «credit VaR». La C-VaR représente ici la perte maximale sur un portefeuille de titres à revenus fixes ou sur un portefeuille de prêts avec une probabilité donnée.

Soit une obligation qui paie un coupon annuel C. Nous supposons qu'il existe quatre cotes de crédit, soit quatre états de la nature, le dernier représentant le défaut. Le vecteur des payoffs de cette obligation selon les divers états de la nature diffère selon que l'obligation échoit ou se situe en deçà de sa date d'échéance T. Si (t < T), le vecteur des payoffs de l'obligation est alors le suivant selon les quatre états de la nature :

$$\Psi_t = \begin{bmatrix} C \\ C \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

On suppose ici que le payoff est de λ si la cote est de C et de 0 si la cote est de D. Par ailleurs, si (t = T), c'est-à-dire que l'obligation échoit, le vecteur des payoffs se lit comme suit :

$$\Psi_T = \begin{bmatrix} 1+C \\ 1+C \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour calculer l'espérance du payoff, nous devons ajouter un vecteur qui spécifie l'état de la nature dans lequel se situe initialement l'entreprise. Par exemple, si le vecteur attribué à l'entreprise est le suivant :

$$\mathrm{E}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cela signifie que l'entreprise se situe initialement dans le premier état, c'est-à-dire qu'elle s'est vu attribuer la cote A. L'espérance du payoff pour ladite obligation est donc le suivant :

$$E\left[\Psi_t\right] = \mathrm{E}_0 \Pi^t \Psi_t$$

avec Π la matrice de transition.

Nous pouvons pousser plus avant notre analyse et calculer la perte maximale sur une obligation avec une probabilité donnée, soit la C-VaR de cette obligation. Nous supposons que l'échéance de l'obligation est d'une année et qu'elle ne puisse prendre que quatre valeurs V_i à la fin de l'année, i désignant l'état de la nature. La valeur espérée de V est de : $V_m = \sum_{i=1}^{4} p_i V_i$, avec p_i la probabilité de l'état i. Par ailleurs, l'écart-type de V se calcule comme suit : $\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} p_i (V_i - V_m)^2}$. Mais comme on sait que : $\sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$, on peut réécrire l'écart-type comme suit : $\sigma_V = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} p_i V_i^2 - (V_m)^2}$. Si V obtempère à une distribution normale, la C-VaR peut être alors définie comme suit, au seuil de confiance de 95% : $C - VaR = V_m - 1{,}65\sigma_V$. Mais les payoffs de la dette ne sont pas réputés normaux. Les pertes sur prêts ont plutôt une distribution qui est apparentée à celle des payoffs d'un put à découvert. C'est-à-dire que la distribution est nettement leptokurtique et comporte une asymétrie négative.

Cuthbertson (2001) fournit une autre façon d'évaluer l'espérance des payoffs d'une obligation à la fin d'une année de même que son écart-type. Soit une obligation qui dispose de la cote A au départ. Elle comporte une échéance de n années et un coupon annuel de C. On veut évaluer l'espérance de ses payoffs à la fin de la première année de même que l'écart type de ceux-ci.

Supposons que la matrice de transition ne comporte que trois cotes : A,B et C, la dernière étant associée au défaut. La matrice de transition impute des probabilités à l'entreprise émettrice de l'obligation pour ces trois cotes. Comme nous évaluons l'obligation à la fin de la première année, nous disposons de la structure à terme des taux forwards pour chacune des (n-1) années qu'il reste à courir à l'obligation à la fin de la première année. Considérons la cote A. Pour cette cote, nous devons disposer du taux forward f_{12}, soit le taux d'actualisation qui s'applique de la fin de la première année jusqu'à la fin de la deuxième année. Nous devons également disposer du taux forward f_{13}, soit le taux qui s'applique de la fin de la première année jusqu'à la fin de la troisième année et ainsi de suite jusqu'à $f_{1,n-1}$. La structure à terme de ces taux diffère également selon les cotes car des cotes plus risquées verront leurs taux forwards gonflés par des primes de risque plus importantes.

A la fin de l'année 1, l'entreprise peut être demeurée dans la cote A ou être passée aux cotes B et C. Si elle est demeurée dans la cote A, la valeur de l'obligation est alors de :

$$V_{A,A} = C + \frac{C}{1+f_{12}} + \frac{C}{(1+f_{13})^2} + \frac{C}{(1+f_{14})^3} + \ldots + \frac{C}{(1+f_{1n})^{n-1}}$$

Et l'on reprend ce calcul pour $V_{A,B}$ et $V_{A,C}$, en prenant bien soin de modifier la structure à terme des taux forwards de manière à prendre en compte les primes de risque différentes d'une cote à l'autre.

On peut alors évaluer comme suit l'espérance des payoffs de l'obligation et son écart-type à la fin de la première année :

$$V_{m,A} = \sum_{i=1}^{3} p_i V_i$$

où les pi sont tirées de la matrice de transition. Par ailleurs, l'écart-type des payoffs se calcule comme suit :

$$\sigma_{,A} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} p_i V_i^2 - V_{m,A}^2}$$

Encore une fois, on peut calculer la C-VaR pour un seuil de confiance de 95% comme suit : $C-VaR = V_m - 1{,}65\sigma_V$. Il reste que ce calcul est sujet à caution comme nous le disions antérieurement car la distribution des pertes d'une dette risquée comporte, à l'instar de la distribution des payoffs d'un short put, une asymétrie négative et un fort niveau de leptokurtisme. Une façon de faire face à ce problème est de se servir d'un multiple plus élevé que 1,65 pour calculer la C-VaR au seuil de confiance de 95%. On peut recourir à l'expansion de Cornish-Fisher pour effectuer cette correction.

5. Les dérivés du crédit

Les dérivés du crédit sont des titres contingents dont les payoffs sont reliés à la situation de crédit d'une entreprise donnée ou d'une entité souveraine. Le marché des dérivés du crédit est relativement récent puisque son origine remonte au début de la décennie 1990. Les produits dérivés traditionnels offrent une protection contre les risques de marché, c'est-à-dire contre les fluctuations des prix des instruments financiers et des taux d'intérêt. Par ailleurs, les dérivés du crédit offrent une protection contre les événements de crédit susceptibles de causer des pertes à l'investisseur, comme le défaut de paiement par l'émetteur d'une obligation. Les payoffs des dérivés du crédit sont soit reliés à un événement du crédit, soit à un indicateur du risque de crédit. Ils peuvent entretenir une relation linéaire ou non linéaire avec ces variables. Ces instruments sont des instruments hors-bourse[12], offerts par des institutions financières à leurs clients.

Selon Myhre (2003), l'apparition des dérivés du crédit s'explique en partie par la réglementation bancaire internationale mise sur pied par le Comité de Bâle en 1988. En effet, en vertu de cette réglementation, chaque prêt accordé reçoit une pondération de 100% s'agissant du calcul du capital réglementaire. Or, si la banque le couvre par un dérivé du crédit, ce coefficient s'abaisse à 20%. Le recours aux dérivés du crédit permet donc à une banque d'économiser du capital, une denrée rare, cela va sans dire.

Le tableau 4, tiré de Jorion (2003), donne la répartition du marché des dérivés du crédit en 2003.

[12] *Over-the-Counter*, en anglais.

Tableau 4

Répartition des dérivés du crédit
(en % des valeurs notionnelles)
2003

Type	%
Swaps de défaut de crédit	73%
Titrisation synthétique	22%
Notes liées au crédit	3%
Swaps à rendement total	1%
Options d'écarts de crédit	1%
Total	100%

5.1 Les swaps de défaut de crédit

Comme l'indique le tableau 4, les swaps de défaut de crédit dominent très nettement le marché des dérivés du crédit. Dans un swap classique, la partie A paie à la partie B un montant fixe par période, assimilable à une prime d'option ou d'assurance, et s'il n'y a pas défaut, la partie A ne reçoit rien. Par ailleurs, si le prêt consenti par la partie A est mis en défaut, la partie B paie à la partie A la valeur nominale du prêt à laquelle est retranchée sa valeur sur le marché secondaire.

Le payoff d'un swap de défaut de crédit est égal au montant suivant :

$$Payoff = valeur\ notionnelle \times Q \times I(EC)$$

où la valeur notionnelle est le montant du prêt que couvre le swap; Q est le paiement par unité de valeur notionnelle et I(EC) est la fonction indicatrice qui prend la valeur 1 si le défaut se produit et 0 autrement.

Il existe une variante au swap de crédit classique, soit le swap de crédit pur. Dans cette opération, la partie qui se couvre, disons A, paie à sa contrepartie B le LIBOR auquel s'ajoute un écart («spread») relié au risque du prêt que couvre le swap. Ce paiement persiste tant et aussi longtemps qu'il n'y a pas défaut. Lorsque le défaut se produit, ce paiement cesse. Par ailleurs, B paie à A le LIBOR sur toute la durée du prêt indépendamment du défaut de paiement. Ces taux d'intérêt s'appliquent à un montant notionnel qui représente la valeur du prêt. Ce montant est dit «notionnel» car il ne fait pas l'objet d'échange. Comme pour tout swap, sa valeur est nulle au début, en ce sens que l'espérance des cash-flows nets actualisés du swap est nulle.

Jorion (2003) note que les swaps de crédit sont incorporés[13] dans plusieurs instruments financiers. A titre d'exemple, acheter une obligation risquée revient à acheter une obligation sans risque et à vendre un swap de défaut de crédit.

Longstaff et al. (2003) fournissent un exemple simple de swap de crédit. Ils supposent que le 23 janvier 2002, un investisseur qui veut se protéger contre le risque de crédit achète une protection de 5 ans contre le défaut d'obligations dont le rendement est de 7,75% et qui échoient le premier avril 2007. L'investisseur a par-devers lui 10000 de ces obligations dont la valeur nominale de chacune est de 1000 \$. La valeur notionnelle de la position de l'investisseur se chiffre donc à 10 millions \$. Le swap de crédit offre pleine protection de la valeur notionnelle des obligations. La prime (*spread)* est de 169 points de base (1,69%). Cela représente une prime de: $\frac{A}{360}\times 169$ points de base par trimestre, où A représente le nombre de jours dans un trimestre. Par conséquent, le paiement par trimestre de l'acheteur de ce swap de crédit est de: $\frac{A}{360}\times(10\times 10^6\$)\times 0{,}0169=\frac{A}{360}\times 169000\$$. S'il y a défaut, l'investisseur livre ses 10000 obligations au vendeur du swap et reçoit un paiement de 10 millions \$.

Le modèle de Longstaff et al. (2003) de la prime du swap de crédit

[13] «embedded», en anglais.

Longstaff et al. (2003) ont développé un modèle à forme réduite qui comporte une solution analytique et dont le but est de déterminer la prime du swap de crédit («spread»). Le modèle comporte deux variables-clefs qui suivent un processus stochastique: r_t, le taux d'intérêt sans risque, et λ_t, l'intensité du défaut qui est modélisée en vertu d'un processus de Poisson. Le détenteur du swap de crédit récupère une fraction égale à (1-w) de la valeur nominale de l'obligation advenant un défaut.

Comme r_t et λ_t suivent des processus stochastiques indépendants, point n'est besoin de spécifier la dynamique risque-neutre du taux d'intérêt. La valeur D(t) de l'obligation à coupon zéro sans risque est donnée par l'équation suivante:

$$D(T) = E\left[e^{-\int_0^T r_t dt} \right]$$

Par ailleurs, l'intensité du défaut suit la dynamique risque-neutre suivante:

$$d\lambda = (\alpha - \beta\lambda)dt + \sigma\sqrt{\lambda}dz$$

Les écarts de rendement suivent ainsi un processus de retour vers la moyenne et font montre d'hétéroscédasticité conditionnelle. Le processus racine carré fait en sorte que λ_t demeure positif. La probabilité p_t qu'un défaut ne se soit pas produit au temps T est égale à:

$$p_t = e^{-\int_0^T \lambda_t dt}$$

Par ailleurs, la fonction de densité du temps jusqu'au défaut est de:

$$\lambda_t e^{-\int_0^t \lambda_s ds} dt$$

Il est alors facile de représenter la valeur des obligations corporatives et la prime du swap de crédit comme de simples espérances dans l'univers risque-neutre. Supposons que l'obligation corporative dont nous voulons analyser le risque de crédit verse un coupon continu c. Le prix de cette obligation corporative, désigné par OC(c,w,T) est alors de:

$$OC(c,w,T)=E\left[c\int_0^T e^{-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds}dt\right]+E\left[e^{-\int_0^T (r_t+\lambda_t)dt}\right]+E\left[(1-w)\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds}dt\right]$$

Cette expression du prix de l'obligation corporative s'explique facilement. Le premier terme à droite représente la valeur présente des coupons promis par l'obligation. A l'instar du modèle de Merton, on remarque que le risque de défaut a pour conséquence de rehausser le taux d'actualisation r du coefficient d'intensité du défaut λ. Le deuxième terme à droite de cette équation est la valeur présente du principal promis alors que le troisième terme est la valeur présente des montants récupérés advenant l'événement de défaut.

Soit s la prime payée par l'acheteur du swap de crédit. Supposons dans un premier temps que λ ne soit pas stochastique. La valeur présente de la prime reçue par l'acheteur du swap, désignée par P(s,t) est égale à:

$$P(s,T)=E\left[s\int_0^T e^{-\int_0^t (r_s+\lambda)ds}dt\right]$$

Par ailleurs, l'espérance de la valeur des pertes subie par le vendeur du swap, désignée par PR(w,T), est égale à:

$$PR(w,T)=E\left[w\lambda\int_0^T e^{-\int_0^t (r_s+\lambda)ds}dt\right]$$

Pour trouver la prime s, il suffit d'égaliser P(s,t) et PR(w,T). On trouve alors facilement:

$$s=\lambda w$$

Supposons que la perte soit totale lors du défaut, c'est-à-dire que w soit égal à 1. La prime du swap de crédit est alors égale à λ, qui mesure l'intensité du défaut dans la distribution de Poisson. Dans l'exemple antérieur, s était égal à 0,169. Cela revenait à dire qu'un défaut était prévu à environ tous les six ans (1 / 0,169).

Mais le tableau est modifié si λ obtempère à un processus stochastique comme dans le modèle de Longstaff et al. (2003). P(s,t) est alors égal à:

$$P(s,T) = E\left[s\int_0^T e^{-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds} dt \right]$$

alors que PR(w,T) est de:

$$PR(w,T) = E\left[w\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds} dt \right]$$

Pour fixer la prime s à sa juste valeur, il faut évidemment que l'espérance de la prime payée par l'acheteur du swap, soit P(.), soit égale à l'espérance des pertes subies par le vendeur du swap, soit PR(.). La valeur espérée des cash-flows nets du swap est alors nulle. Pour déterminer la prime s du swap de crédit, il suffit donc d'égaler P(.) et PR(.) et d'isoler s:

$$s = \frac{E\left[w\int_0^T \lambda_t e^{-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds} dt \right]}{E\left[\int_0^T e^{-\int_0^t (r_s+\lambda_s)ds} dt \right]}$$

La prime s peut alors être interprétée comme la valeur présente pondérée de $\lambda_t w$.

Selon Duffie (1999), la prime s représente l'écart de rendement en regard du taux sans risque qu'une obligation corporative à taux flottant devrait verser pour se vendre au pair. Selon Longstaff et al. (2003), on peut utiliser comme première approximation de s l'écart de rendement entre une obligation corporative et une obligation gouvernementale aux dates d'échéance et aux coupons identiques.

Le modèle de Longstaff et al. (2003) comporte une solution analytique. On peut en effet écrire le prix OC de l'obligation corporative comme suit:

$$OC(c,w,T) = c\int_0^T D(t)A(t)e^{B(t)\lambda} dt + D(T)A(T)e^{B(t)\lambda} +$$
$$(1-w)\int_0^T D(t)[C(t) + H(t)\lambda]e^{B(t)\lambda} dt$$

avec λ la valeur courante de l'intensité du processus de Poisson et:

$$A(t)=\left(e^{\frac{\alpha(\beta+\phi)}{\sigma^2}t}\right)\left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}}$$

$$B(t)=\frac{\beta-\phi}{\sigma^2}+\frac{2\phi}{\sigma^2\left(1-\kappa e^{\phi t}\right)}$$

$$C(t)=\frac{\alpha}{\phi}\left(e^{\phi t}-1\right)e^{\frac{\alpha(\beta+\phi)}{\sigma^2}t}\left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+1}$$

$$H(t)=\left(e^{\frac{\alpha(\beta+\phi)+\phi\sigma^2}{\sigma^2}t}\right)\left(\frac{1-\kappa}{1-\kappa e^{\phi t}}\right)^{\frac{2\alpha}{\sigma^2}+2}$$

$$\phi=\sqrt{2\sigma^2+\beta^2}$$

$$\kappa=\frac{\beta+\phi}{\beta-\phi}$$

La solution analytique de la prime s du swap de crédit est la suivante:

$$s=\frac{w\int_0^T D(t)\left[C(t)+H(t)\lambda\right]e^{B(t)\lambda}dt}{\int_0^T D(t)A(t)e^{B(t)\lambda}dt}$$

5.2 Swap à rendement total

On suppose qu'une banque a consenti un prêt de 100 millions \$ au taux de 6% et que, pour le couvrir, elle se porte acquéreur du swap à rendement total (SRT). Dans un tel swap, la banque paie à sa contrepartie deux montants : i) un montant fixe F qui représente grosso modo les intérêts du prêts; ii) le changement dans la valeur du prêt désigné par P. Le paiement de la banque est donc égal à :

$$Paiement=F+\frac{P_t-P_{t-1}}{P_{t-1}}$$

Si la valeur du prêt est négative, la banque retirera donc une compensation. Par ailleurs, la banque reçoit le LIBOR auquel s'ajoute un écart («spread»). Supposons que la somme de ces deux pourcentages soit de 6%.

Supposons que la valeur du prêt ait diminué de 5%. La banque devra donc payer à sa contrepartie 1% (6% - 5%) et recevra de sa contrepartie 6%. Sa recette nette est donc de 5%. Ce pourcentage compense la banque pour la chute de la valeur du prêt qu'elle a consenti.

5.3 Options de crédit

Soit l'écart SP («spread») entre le taux de rendement d'une obligation risquée et celui d'une obligation sans risque. Le payoff à l'échéance d'une option d'écart de crédit est égal au montant suivant :

$$payoff = SP \times durée\ \mathrm{mod}ifiée \times valeur\ notionnelle$$

On ne recourt pas ici à la fonction MAX puisque SP est nécessairement positif. Le prix de cette option se détermine comme à l'accoutumée, c'est-à-dire :

$$C = e^{-r(T-\tau)} E^{Q}(payoff)$$

avec T la date d'échéance de l'option et $E^{Q}(.)$, l'opérateur du calcul d'une espérance risque-neutre.

Supposons qu'une banque ait consenti un prêt d'un risque équivalant à celui de l'obligation risquée qui entre dans le calcul du prix de l'option. Si le prêt se déprécie, la banque récupérera en tout ou partie cette perte car l'écart de rendement qui entre dans le calcul du payoff de l'option qu'elle détient aura augmenté.

L'écart qui entre dans le calcul de l'option peut être aussi égal à la différence entre les rendements de deux obligations de risque différent, soit (SP_1 - SP_2). Le payoff de l'option de crédit est alors égal à :

$$payoff = MAX(SP_1 - SP_2, 0) \times durée\ modifiée \times valeur\ notionnelle$$

Un put de défaut autorise par ailleurs la vente d'une obligation risquée à un prix d'exercice donné s'il y a défaut. Le payoff de l'option est donc de :

$$\text{payoff} = \text{prix d'exercice x I(EC)}$$

avec I(EC) la fonction indicatrice qui prend la valeur 1 s'il y a défaut et 0 autrement. S'il n'y a pas défaut, la banque perd la prime. Un put de défaut est donc à proprement parler l'équivalent d'une police d'assurance.

Par ailleurs, une option d'échange permet d'échanger une obligation risquée B* contre un montant donné d'option sans risque. Le payoff d'une telle option est égal à :

$$payoff = (qB - B^*)^+$$

avec B, la valeur de l'obligation sans risque; B*, la valeur de l'obligation risquée et ($q < 1$).

5.4 Contrat à terme («forwards») de crédit

Un tel contrat est écrit sur une obligation qui sert d'indice de référence («benchmark») à un prêt. Supposons qu'une banque ait consenti un prêt de trois ans et qu'elle couvre son risque de crédit en entrant dans un contrat dont l'écart à terme (K_F), ici le taux d'exercice, est de 2%. Le rendement de l'obligation qui sert d'indice de référence au prêt est de SP. Le payoff de ce contrat à l'échéance est de :

$$\text{payoff} = \text{valeur notionnelle} \times (S_{PT} - K_F) \times \text{durée modifiée}$$

Le payoff de la contrepartie est à l'opposé de celui de la banque. Si le prêt consenti par la banque est parfaitement corrélé à l'obligation qui lui sert de point de référence dans le contrat à terme, le risque de crédit de la banque est parfaitement couvert. Si le risque de la compagnie a augmenté durant la durée du prêt, alors $(S_{PT} - K_F) > 0$ et par conséquent le contrat est en-jeu à son échéance. Cependant, la banque devra payer à sa contrepartie si $\left(S_{PT} - K_F\right) < 0$ à l'échéance du contrat, mais, selon l'équation du payoff, ce montant se limite à :

$$\text{valeur notionnelle} \times \mathrm{K_F} \times \text{durée modifiée}$$

Cuthbertson (2001) note que, paradoxalement, pour un contrat à terme de crédit, le payoff pour le vendeur est similaire à l'achat d'une option de vente.

5.5 La titrisation des prêts et les notes reliées au crédit («credit linked notes»)

La titrisation («securitisation») s'opère depuis plusieurs décennies, notamment aux États-Unis. Elle consiste à transformer des prêts, qui ne disposent pas d'un marché secondaire actif, si tant est que ce marché secondaire existe, en titres liquides. La technique est de regrouper ces prêts et d'émettre des unités pour les financer. Ces unités sont assimilables à des parts dans un fonds de placement.

La titrisation est particulièrement populaire dans le secteur hypothécaire. On divise même les fonds d'hypothèques en tranches de risques de manière à segmenter selon les clientèles. Utilisée depuis très longtemps aux États-Unis, la titrisation d'hypothèques ne s'est vraiment développée que ces dernières années au Canada à la suite de changements réglementaires. Les sources traditionnelles du financement hypothécaire, soit les dépôts à terme et les certificats de placement, commençaient également à se tarir à la suite de la désescalade des taux d'intérêt. La titrisation des hypothèques est venue à la rescousse.

La titrisation concerne également des catégories de prêts autres que les hypothèques. Les prêts personnels et les prêts commerciaux, qui ne disposent pas d'un marché liquide, font également l'objet d'une titrisation. Il est à remarquer que tous les actifs titrisés sont généralement considérés hors-bilan par les banques.

Les notes liées au crédit sont une forme de titrisation qui ne se traduit pas par le retrait des prêts du bilan. La banque décide de titriser un groupe de prêts et elle émet en contrepartie des notes liées au crédit. Le rendement de ces notes est proportionné au risque pris par l'investisseur. A la limite, le détenteur d'une note de crédit prend en charge tout le risque de défaut de l'actif titrisé. Il est donc prêt à subir une perte de principal advenant le défaut du client de la banque.

Jorion (2003) donne l'exemple d'une autre forme de note liée au crédit. L'investisseur qui se porte acquéreur d'une note de crédit en paie sa valeur nominale. Un fiduciaire investit les fonds recueillis dans des actifs de première catégorie et prend une position à découvert dans un swap de défaut de crédit. Le rendement de ces actifs est l'ajout au LIBOR d'un écart de Y%. Par ailleurs, le swap de défaut de crédit rapporte une marge additionnelle de X%. Ce swap peut avoir été émis par une banque qui veut se protéger contre un risque de crédit. Le rendement global de l'investisseur est donc de : (LIBOR + Y% + X%). En contrepartie de ce rendement accru, l'investisseur est prêt à subir une perte de principal advenant le défaut. Les notes liées au crédit peuvent être exposées à plus d'un risque de crédit et leur rendement peut être accru davantage à travers le levier.

6. Autres approches au risque de crédit

6.1 Le modèle KMV de Moody

Le modèle KMV est un modèle structurel qui s'inspire du modèle de Merton. Le modèle calcule la distance de défaut calculée en regard de la barrière qui enclenche le défaut. Le principal output du modèle KMV est la fréquence espérée du défaut.

6.2 Le modèle E2C («equity to credit») de JP Morgan

Ce modèle est encore dans la lignée de celui de Merton. Comme le modèle KMV, il s'intéresse à la probabilité espérée du défaut. En intégrant la fonction de densité du défaut, il arrive à calculer les primes sur les swaps de crédit.

6.3 RiskMetrics, CreditMetrics et CrashMetrics

Toujours mis de l'avant par JPMorgan, le modèle RiskMetrics se spécialise dans le calcul des paramètres de la VaR. CreditMetrics s'intéresse pour sa part au risque de défaut. Sa méthodologie permet de calculer le risque associé à un portefeuille de titres. Pour sa part, CrashMetrics se penche sur les scénarios extrêmes de risque auxquels est exposé un portefeuille.

Conclusion

Le risque de crédit est une application de la théorie des produits dérivés qui a encore fait l'objet d'un nombre plutôt restreint d'études jusqu'ici en regard des très nombreuses recherches dans le champ des produits dérivés classiques. De même, les dérivés du crédit, dont le marché est très étendu aux États-Unis, sont encore relativement peu utilisés au Canada. D'ailleurs, le Canada accusait jusqu'à il n'y a pas si longtemps un retard considérable en matière de titrisation sur les États-Unis, retard qu'il comble progressivement. La tritisation dans le domaine du prêt hypothécaire a d'ailleurs bondi ces dernières années au Canada à la suite de changements réglementaires.

Selon plusieurs auteurs, les dérivés du crédit auraient permis aux banques de faire face à la crise financière du début du millénaire. Sans ces dérivés, on aurait pu assister à de nombreuses faillites bancaires. Il appert donc que les dérivés du crédit transfèrent de façon efficace le risque de crédit, c'est-à-dire vers les agents qui sont le mieux en mesure de le supporter.

Il reste que la théorie du risque du crédit est encore à la recherche d'une mesure du risque qui prenne en compte de façon satisfaisante les risques extrêmes, c'est-à-dire les risques dits «de queue». L'intégration de la théorie de la dominance stochastique avec celle des mesures du risque semble être une voie très prometteuse pour atteindre cet objectif. Du fait du caractère très asymétrique et très leptokurtique de la distribution des pertes du crédit, la théorie de Markowitz, basée sur l'analyse moyenne-variance, se révèle inappropriée pour analyser le risque de crédit. Il reste donc encore beaucoup à faire dans le domaine de l'analyse de cette forme de risque qui est très assimilable à celle des options.

Bibliographie

Benninga, S.(2000), Financial Modeling, 2ième édition, the MIT Press.

Black, F. et J.C. Cox (1976), Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions, *Journal of Finance*, 31, pp. 361-367.

Cuthbertson, K. et D. Nitzsche (2001), Financial Engineering : Derivatives and Risk Management, Wiley.

Duffie, G. (1999), Estimating the Price of Default Risk, *Review of Financial Studies*, 12, pp. 197-226.

Jorion, P. (2003), Financial Risk Manager Handbook, 2ième édition, Wiley.

Longstaff, F., Mithal, S. et Neis, E. (2003), The Credit Default Swap Market: Is credit Protection Priced Correstly?, USC FBE Finance Seminar, 24 octobre 2003.

Longstaff, F. et Schwartz, E.S. (1995), A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt, *The Journal of Finance*, 50, pp. 789-819.

Merton, R.C.(1974), On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates, *Journal of Finance*, 29, pp. 449-470.

Myrhe, H.M. (2003), Pricing Credit Derivatives, document de travail, Norwegian University of Science and Technology.

Vasicek, O. (1977), An equilibrium characterization of the term structure, *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 117-161.

Wilmott, P.(2000), Paul Wilmott on Quantitative Finance, volumes 1 et 2, Wiley.

Yamai, Y et T. Yoshiba (2001a), On the Validity of Value-at-Risk: Comparative Analyses with Expected Shortfall, document de travail, Bank of Japan.

Yoshiba, T. et Y Yamai (2001b), Comparative Analyses of Expected Shortfall: expected utility maximisation and tail risk, document de travail, Bank of Japan.