

Simulations de la couverture delta et de la couverture delta-gamma d'un portefeuille dans le cadre du modèle de Black et Scholes

François-Éric Racicot*

Département des sciences administratives
Université du Québec, Outaouais et LRSP

Raymond Théoret

Département Stratégie des Affaires
Université du Québec, Montréal

RePAd Working Paper No. 122006

* Adresse postale : François-Éric Racicot, Département des sciences administratives, Université du Québec en Outaouais, Pavillon Lucien Brault, 101 rue Saint Jean Bosco, Gatineau, Québec, Canada, J8Y 3J5.

Correspondance : francoiseric.racicot@uqo.ca.

Raymond Théoret, Département stratégie des affaires, Université du Québec à Montréal, 315 est, Ste-Catherine, Montréal, H2X-3X2. Correspondance : theoret.raymond@uqam.ca.

Ce papier est l'un des chapitres de notre prochain ouvrage intitulé : *Finance computationnelle et gestion des risques*.

Simulations de la couverture delta et de la couverture delta-gamma d'un portefeuille dans le cadre du modèle de Black et Scholes

Résumé

Plusieurs gestionnaires de portefeuille pensent encore à tort qu'une couverture delta suffit pour protéger leur portefeuille contre les fluctuations des marchés financiers. Mais une augmentation marquée de la volatilité des cours boursiers les décevra dans leurs attentes. Après avoir exposé les rudiments mathématiques de l'équation de Black et Scholes, cet article présente des simulations inédites dans Excel de la couverture delta et de la couverture delta-gamma basées sur la formule de Black et Scholes. On y constate que la couverture delta-gamma est de loin préférable à une simple couverture delta.

Abstract

Many portfolio managers think yet wrongly that delta hedging is sufficient to protect their portfolio against the fluctuations of financial markets. But a large increase of stock exchange volatility would deceive their expectations. After having considered the mathematical foundations of the Black and Scholes formula, this paper produces new simulations in Excel of delta and delta gamma hedging based on the Black and Scholes formula. We notice that delta-gamma hedging is quite superior to a simple delta hedging.

Mots-clefs : ingénierie financière; produits dérivés; couverture.

Keywords : financial engineering; derivatives; hedging.

JEL : G12; G13; G33.

Le modèle de Black et Scholes a véritablement révolutionné la finance moderne. Publié en 1973, il correspond au lancement des options sur les bourses américaines. Le marché des options devait connaître par la suite un essor très considérable.

Contrairement à Black et Scholes, les auteurs antérieurs n'avaient pu trouver une solution analytique au prix d'un call européen qui soit opérationnelle. Avant 1973, les chercheurs s'intéressaient surtout à la valorisation des warrants, les autres formes d'options n'étant pas négociées sur des marchés boursiers organisés et faisant donc l'objet de contrats de gré à gré. Les warrants sont des options d'achat à long terme qui se traduisent par une émission d'actions lors de leur exercice. Or, les options d'achat classiques ne donnent pas lieu à une émission d'actions mais seulement à un simple transfert entre les parties de la transaction. Les warrants se traduisent donc par un effet de dilution du capital des actionnaires existants, ce qui n'est pas le cas pour les options classiques. Comme davantage d'actions sont émises lors de l'exercice des warrants, il y a en effet lieu de craindre un effet de dilution, c'est-à-dire une diminution du prix de l'action sous-jacente.

Or, les chercheurs n'avaient pas jusque-là su trouver une solution analytique opérationnelle au prix du warrant. Cette solution intégrait toujours le prix du risque et ipso facto le degré d'aversion au risque des investisseurs et partant, leur fonction d'utilité. Ces deux variables étant très difficiles à estimer, force était de trouver une solution analytique qui en fasse abstraction. Black et Scholes ont su éliminer le prix du risque du calcul du prix d'un call européen en exploitant la corrélation entre le prix de l'option et de son sous-jacent. En combinant l'option avec son sous-jacent, ils ont ainsi pu former un portefeuille exempt de risque. Le prix du risque était alors éliminé. Ils ont pu de la sorte trouver une solution exacte au prix d'un call européen écrit sur une action ne versant pas de dividende.

À l'intérieur de cet article, nous fournirons dans un premier temps une preuve à l'équation de Black et Scholes. En effet, il existe plusieurs façons de prouver l'équation de Black et Scholes. On peut en effet solutionner directement l'équation différentielle de Black et Scholes en recourant à l'équation de la chaleur, dont la solution est connue depuis longtemps. Black et Scholes ont d'ailleurs procédé de la sorte pour calculer l'équation du prix d'une option d'achat européenne écrite sur une action ne versant pas de dividende. On peut par ailleurs invoquer le théorème de représentation de Feynman-Kac pour établir le prix de ladite option. En effet, en vertu de ce théorème, l'équation différentielle de Black et Scholes a comme pendant une espérance dans l'univers risque-neutre. En fait, le prix de l'option d'achat est la valeur actualisée de l'espérance du payoff final de l'option, définie dans l'univers risque-neutre. C'est de cette façon que nous ferons la preuve de l'équation de Black et Scholes, cette solution étant beaucoup plus simple que celle de l'équation différentielle de Black et Scholes.

Puis nous dériverons les «grecs» des options, c'est-à-dire les sensibilités du prix de l'option à ses divers paramètres. Comme nous serons à même de le constater, ceux-ci sont des ingrédients essentiels à la couverture delta-neutre et à la couverture delta-gamma. Puis nous examinerons l'impact d'un dividende fixe et d'un dividende proportionnel sur la formule de Black et Scholes. Nous pourrions alors introduire l'équation de Black et Scholes généralisée, qui permet de valoriser un grand nombre de produits dérivés. Font partie de ceux-là les options sur contrats à terme et les options sur devises.

1. Un aperçu de l'équation de Black et Scholes

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction de ce papier, Black et Scholes (1973) furent les premiers à dériver une solution analytique pour le prix d'un call européen qui fasse abstraction du prix du risque. Leur solution se veut exacte car elle repose sur le principe de l'absence d'arbitrage. Cette solution, que nous prouverons dans la section suivante, s'écrit :

$$C = S_0 N(d_1) - X e^{-r_f T} N(d_2)$$

avec C le prix d'un call écrit sur une action ne versant pas de dividende ; S_0 , le prix actuel de l'action ; X , le prix d'exercice de l'option ; r_f , le taux sans risque et T , la durée de l'option. $N(d)$ est la probabilité cumulative d'une variable normale unitaire, soit :

$$N(d) = \int_{-\infty}^d f(z) dz$$

avec,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + r_f T}{\sigma \sqrt{T}} + \frac{1}{2} \sigma \sqrt{T}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

σ désignant l'écart type du rendement de l'action. C'est à la preuve de cette équation que nous nous attaquons maintenant.

2. Preuve de l'équation de Black et Scholes

Supposons qu'un investisseur vende un contrat à terme de gré à gré¹ (*forward contract*) écrit sur une action dont le flux monétaire final est de S_T , une variable aléatoire. S désigne le prix de l'action et T , l'échéance du contrat. A l'échéance, le prix de ce contrat est de $E(S_T)$, où $E(.)$ est l'opérateur d'espérance. Le vendeur du contrat s'engage à vendre l'action au prix prédéterminé X . La valeur non actualisée (V) de ce contrat est de:

$$V = E(S_T) - X \quad (1)$$

La valeur V de ce contrat est nulle au départ. En effet, ce contrat constitue une obligation pour le vendeur de livrer l'action et pour l'acheteur de prendre livraison de l'action. Il n'y a aucune autre alternative pour les deux parties. L'acheteur n'a pas l'option d'exercer ou non le contrat. Il doit obligatoirement l'exercer à l'échéance au prix X . Il en paie donc le juste prix sans l'additionner d'une prime.

¹ Qui doit être distingué du contrat à terme boursier (*futures contract*).

Comment se détermine $E(S_T)$, le prix du contrat à terme? Puisque S_T est une variable aléatoire, on pourrait penser que l'on doit recourir au calcul probabiliste pour déterminer cette espérance, en l'occurrence au théorème central limite. Il n'en est rien. En fait, nous pouvons nous camper dans un univers déterministe pour calculer cette espérance, soit l'univers neutre au risque. En effet, le vendeur du contrat à terme a le loisir d'acheter le sous-jacent dudit contrat, soit l'action, au prix S_0 aujourd'hui. Pour financer cet achat, il emprunte au taux sans risque r_f , taux composé de façon continue. A l'échéance du contrat, il pourra livrer l'action qu'il détient et rembourser le montant de son emprunt, soit $S_0 e^{r_f T}$. Le prix à terme du contrat est donc de $S_0 e^{r_f T}$. C'est ce que devra payer l'acheteur du contrat à terme à son échéance. C'est le prix qu'impose l'arbitrage sur les marchés financiers. Tout autre prix donne lieu à une situation d'arbitrage².

Le prix que nous venons de déterminer est obtenu en recourant à la mesure de probabilité risque neutre, c'est-à-dire:

$$E^Q(S_T) = e^{r_f T} S_0 \quad (2)$$

où $E^Q(\cdot)$ est l'opérateur d'espérance dans un univers neutre au risque. Dans cet univers, la valeur présente de S_T est une martingale. Choisissons un bon comme numéraire de manière à normaliser le prix de l'action. Nous avons:

$$E^Q\left(e^{-r_f T} S_T\right) = S_0 \quad (3)$$

La valeur présente de S_T est donc bien une martingale³. A remarquer que $E^Q(\cdot)$ est une espérance conditionnelle, même si nous avons simplifié la notation. Cette espérance est

² Nous recourons donc à l'arbitrage pour valoriser l'option en supposant comme donnés le prix du sous-jacent (S_0) et, comme nous le verrons plus loin, le prix d'une obligation à coupon zéro (B_0). C'est donc le couplet (B_0, S_0) qui sert de point de départ à nos calculs. Une autre façon de valoriser l'option serait de recourir à la technique de l'équilibre général. On ne pourrait plus alors considérer les prix de l'action et de l'obligation comme donnés. Ils seraient déterminés concomitamment avec le prix de l'option.

³ Dans l'univers des probabilités réelles (P), une martingale se définit comme ceci: $E(S_T | S_0) = S_0$. C'est-à-dire que la meilleure prévision de S_T , conditionnellement à l'information disponible au temps 0, est S_0 , soit l'observation actuelle sur le prix de l'action.

conditionnelle à l'information disponible au temps 0, ici S_0 . Or, comme nous le verrons ultérieurement, martingale et absence d'arbitrage sont des concepts qui vont de pair.

En substituant l'équation (2) dans l'équation (1), cette dernière étant actualisée au taux r_f , on a:

$$e^{-r_f T} V = e^{-r_f T} \left(e^{r_f T} S_0 \right) - e^{-r_f T} X = S_0 - e^{-r_f T} X \quad (4)$$

Comparons cette équation à celle du call européen dérivée par Black et Scholes:

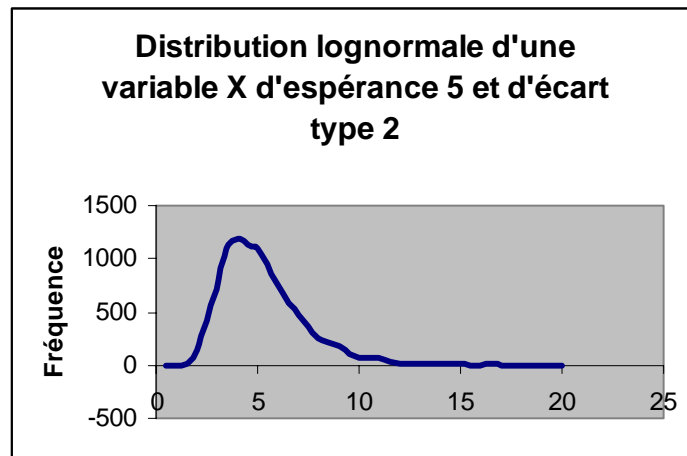
$$c = S_0 N(d_1) - e^{-r_f T} X N(d_2) \quad (5)$$

En comparant les équations (4) et (5), on voit qu'elles sont identiques si: $N(d_1) = N(d_2) = 1$. Par conséquent, un contrat à terme est une forme particulière de call. Pour un tel call, la probabilité d'exercice est en effet de 1 en ce sens que l'acheteur a l'obligation, et non l'option, d'acheter le sous-jacent du contrat⁴. Il ne peut donc spéculer sur sa valeur qui est établie à l'avance.

Pour établir la preuve de l'équation de Black et Scholes, nous devons nous familiariser avec la distribution lognormale puisque l'on suppose que le prix de l'action désigné par S obtempère à une telle distribution dans le modèle de Black et Scholes. Pour approcher cette distribution, nous avons, dans un premier temps, tiré 10000 nombres aléatoires de moyenne 5 et d'écart-type 2 dont la distribution est lognormale en utilisant l'interface *PopTools* d'*Excel*. Nous avons ensuite construit le graphique de la fonction de densité de cette distribution à l'aide de la fonction *Frequency* d'*Excel*, graphique qui apparaît à la figure 1.

⁴ À noter que $N(d_2)$ représente la probabilité d'exercice du call.

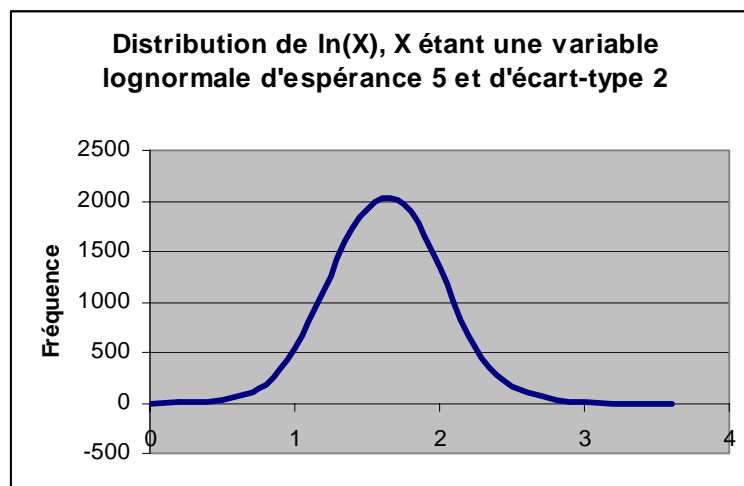
Figure 1



On voit que la distribution lognormale se situe exclusivement dans l'intervalle des réels positifs. Elle présente également une forte asymétrie positive.

Dans un second temps, nous avons calculé le logarithme des nombres aléatoires générés à la première passe et nous avons une fois de plus tracé la distribution correspondante, qui apparaît à la figure 2.

Figure 2



On se rend compte que la distribution de $\ln(X)$ est normale. D'où un premier résultat: si la distribution de la variable aléatoire X est lognormale, la distribution du logarithme de X est normale. La relation mathématique entre les distributions lognormale et normale s'établit comme suit. La distribution D_z de la variable lognormale z s'écrit:

$$D_z = \frac{1}{zs\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln z - \mu)^2}{s^2}\right)}$$

où $\ln z$ désigne le logarithme népérien de z et où μ et s sont les deux premiers moments de la distribution normale de $\ln z$. Pour passer à cette dernière distribution, il suffit d'effectuer la transformation jacobienne⁵ suivante :

$$D_{\ln z} = D_z \frac{dz}{d \ln z} = D_z \frac{1}{\frac{d \log z}{dz}} = D_z \frac{1}{\frac{1}{z}} = z D_z$$

ce qui implique : $D_{\ln z} = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln z - \mu)^2}{s^2}\right)}$ de telle sorte que : $\ln z \sim N(\mu, s^2)$. La différence

entre les distributions normale et lognormale en est tout simplement une d'échelle, mais il faut remarquer que le passage de la distribution normale à lognormale se traduit par l'apparition d'une asymétrie positive⁶.

⁵ Pour la transformation jacobienne, voir : Racicot, F.-É. et Théoret, R (2001). , Traité d'économétrie financière, Presses de l'Université du Québec, chapitre 1.

⁶ Notons que si $z \sim N(\mu, s^2)$, alors : $f_z(z) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(z-\mu)^2}{s^2}\right)}$, où $f_z(z)$ est la fonction de densité marginale de z .

Sa fonction de probabilité cumulative est de : $\int_{-\infty}^z f_z(u) du = F_z(z)$. Transformons la fonction de densité de z de telle sorte qu'elle suive une loi normale d'espérance 0 et de variance unitaire. Soit y cette nouvelle variable. La transformation requise est la suivante : $y = \frac{z - \mu}{s}$. La transformation jacobienne des deux fonctions de densité

est la suivante : $f_y(y) = f_z(z) \frac{dz}{dy}$. Comme $z = sy + \mu \Rightarrow \frac{dz}{dy} = s$. On a donc : $f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$, ce qui est la

Si nous calculons les deux premiers moments de la distribution de $\ln(X)$ à partir de l'échantillon des 10000 variables aléatoires, nous trouvons que la moyenne, désignée par μ , est égale à 1,5348 et que l'écart type, désigné par s , est de 0,3808. On rappelle que les deux premiers moments de la distribution de la variable lognormale X étaient respectivement de 5 et de 2.

On peut établir le lien entre les moments de la distribution lognormale de la variable X et ceux de la distribution normale de la variable $\ln(X)$ en recourant à la fonction génératrice des moments de la distribution lognormale. Cette fonction s'écrit comme suit: $\varphi(\lambda) = e^{\lambda\mu + \frac{\lambda^2 s^2}{2}}$, où μ et s sont les deux premiers moments de la distribution normale correspondante. Cette fonction régurgite les moments non centrés de la distribution lognormale à partir de ceux de la distribution normale. Si $\lambda=1$, on obtient l'espérance de la variable X qui suit une distribution lognormale. Elle est donc égale à: $E(X) = e^{\mu + \frac{s^2}{2}}$. Dans l'exemple précédent, $\mu = 1,5348$ et $s = 0,3808$. On a donc: $E(X) = e^{1,5348 + \frac{(0,3808)^2}{2}} = 4,99 \cong 5$. On rappelle que l'espérance qui nous a servi à générer la figure 1 est de 5. L'erreur minime que nous faisons en utilisant la fonction génératrice de moments en est strictement une d'échantillonnage.

Pour établir la variance non centrée de la distribution lognormale à partir des moments de la distribution normale, nous fixons λ à 2 dans la fonction génératrice des moments de la lognormale. Nous obtenons: $E(X^2) = e^{2\mu + 2s^2}$. Pour calculer la variance de X , nous nous servons du résultat: $VAR(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, $E(X)$ ayant déjà été calculé. Nous

fonction de densité d'une normale d'espérance 0 et de variance 1. La probabilité cumulative de y , désignée par $N(y)$, est de : $\int_{-\infty}^y f_y(u) du$.

obtenons: $VAR(X) = e^{2\mu+2s^2} - e^{2\mu+s^2} = e^{2\mu+s^2} [e^{s^2} - 1]$. L'écart type de X est donc de:

$s = e^{\frac{\mu+s^2}{2}} [e^{s^2} - 1]^{\frac{1}{2}} = E(X) [e^{s^2} - 1]^{\frac{1}{2}}$. En utilisant la moyenne et l'écart type calculés à

partir de la distribution de $\ln(X)$, on obtient: $s = 4,99 \left[e^{(0,3808)^2} - 1 \right]^{\frac{1}{2}} = 1,97 \cong 2$. On rappelle que l'écart type qui nous a servi à établir la distribution de X (figure 1) est de 2. L'erreur que nous commettons ici en est, encore une fois, strictement une d'échantillonnage.

Notons que si la densité lognormale de la variable X est la fonction $f(x)$, alors l'espérance $E(X)$ de cette distribution se calcule mathématiquement comme suit: $E(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx$, les bornes de l'intégrale correspondant à l'intervalle de fluctuation de la lognormale. En représentant par u le logarithme de x , on peut aussi calculer cette espérance de la façon suivante: $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} e^u g(u)du$, où $g(u)$ est la densité normale et où les bornes de l'intégrale correspondent à l'intervalle de fluctuation de la normale. C'est en recourant à cette transformation que nous calculerons les intégrales contenant des variables lognormales dans la preuve qui suit, la distribution normale étant plus malléable que la lognormale. Notons également que si X suit une distribution lognormale et que les deux premiers moments de la distribution de $\ln(X)$ sont de μ et s , alors la variable centrée réduite $\frac{\ln(X) - \mu}{s} \sim N(0,1)$. Nous ferons également appel à ce résultat dans la preuve qui suit⁷.

Nous supposons donc que S obéit à une distribution lognormale et que l'espérance et l'écart type de $\ln(S)$ sont représentés respectivement par μ et s comme dans le cas précédent.

Nous avons alors pour un call européen⁸:

$$E(S - X)^+ = E(S)N(d_1) - XN(d_2) \quad (6)$$

⁷ Le manuel de De la Granville renferme deux excellents chapitres sur les propriétés de la loi lognormale et sur ses rapports avec le mouvement brownien géométrique, soit les chapitres 13 et 16. Voir: De la Granville, Olivier (2001), Bond Pricing and Portfolio Analysis, The MIT Press.

⁸ Notre approche s'inspire de Hull. Mais nous y avons apporté plusieurs nuances. Voir Hull, J.C(2003), Options, Futures and other Derivatives, 5th edition, Prentice Hall.

où $(S-X)^+$ est le flux monétaire final («payoff») du call, avec $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) + \frac{s^2}{2}}{s}$

, $d_2 = \frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) - \frac{s^2}{2}}{s} = d_1 - s$ et où $E(\cdot)$ est l'opérateur d'espérance. Nous voulons

prouver cette formule.

Définissons $f(S)$ comme étant la fonction de densité de S . Par définition, l'espérance de $(S-X)^+$ est donnée par :

$$E(S - X)^+ = \int_X^{\infty} (S - X) f(S) dS \quad (7)$$

où X est la borne inférieure de l'intégrale puisque l'option européenne sera exercée à l'échéance si et seulement si $(S > X)$, c'est-à-dire que $\int_0^X (S - X) f(S) dS < 0$. C'est là le risque asymétrique que comporte un call. Son détenteur n'est pas forcé d'exercer comme c'est le cas dans le contrat à terme antérieur. Il exercera son option à l'échéance si et seulement si $(S > X)$. L'option ne saurait donc rapporter des flux monétaires négatifs comme dans le cas d'un contrat à terme. C'est pourquoi la distribution de $(S-X)^+$ est tronquée et comporte X comme borne inférieure. Avant cette borne, $(S < X)$ et le détenteur de l'option n'exerce pas.

Du fait des propriétés de la loi lognormale examinées antérieurement, nous savons que :

$$E(S) = e^{\mu + \frac{s^2}{2}} \quad (8)$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\ln[E(S)] = \mu + \frac{s^2}{2} \quad (9)$$

ce qui implique que μ est égal à :

$$\mu = \ln[E(S)] - \frac{s^2}{2} \quad (10)$$

De façon à obtenir une variable centrée réduite, nous pouvons appliquer la transformation suivante à $\ln(S)$: $z = \frac{\ln(S) - \mu}{s}$. Cette transformation implique que $zs + \mu = \ln(S)$, c'est-à-dire $S = e^{zs+\mu}$. La variable z est normalement distribuée, d'espérance nulle et d'écart type unitaire. Sa fonction de densité, i.e. la distribution normale standard, est donnée par :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}. \text{ En recourant à cette transformation, nous pouvons réécrire l'espérance}$$

ci-dessus comme suit :

$$E(S - X)^+ = \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} (e^{zs+\mu} - X) f(z) dz \quad (11)$$

où la borne inférieure provient de la transformation de S en variable centrée réduite. Par symétrie, nous devons en effet appliquer la même transformation à X . On peut réécrire cette intégrale comme suit :

$$E(S - X)^+ = \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} e^{zs+\mu} f(z) dz - X \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} f(z) dz \quad (12)$$

Développons l'intégrand de la première intégrale de l'équation (12):

$$e^{zs+\mu} f(z) = e^{zs+\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(zs+\mu-\frac{z^2}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu+\frac{s^2}{2}-\frac{(z-s)^2}{2}} = e^{\mu+\frac{s^2}{2}} f(z-s) \quad (13)^9$$

Par conséquent :

$$E(S - X)^+ = e^{\mu+\frac{s^2}{2}} \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} f(z-s) dz - X \int_{\frac{\ln(X)-\mu}{s}}^{\infty} f(z) dz \quad (14)$$

⁹ Puisque $\mu + \frac{s^2}{2} - \frac{(z-s)^2}{2} = \mu + \frac{s^2}{2} - \left[\frac{z^2 - 2zs + s^2}{2} \right] = \mu + \frac{s^2}{2} - \frac{z^2}{2} + zs - \frac{s^2}{2} = \mu + zs - \frac{z^2}{2}$. On s'est également

servi du résultat: $f(z-s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-s)^2}{2}}$.

En définissant $N(x)$ comme étant la probabilité qu'une variable normale standard soit plus petite que x , alors la première intégrale peut être représentée par

$$1 - N\left(\frac{\ln(X) - \mu}{s} - s\right) = 1 - N\left(\frac{\ln(X) - \mu}{s} - s\right).$$

Ouvrons ici une parenthèse. Nous savons que la loi normale est symétrique. Par définition : $N(x) = \int_{-\infty}^x f(z)dz$. Par symétrie, nous avons alors que : $1 - N(x) = \int_x^{\infty} f(z)dz$. Ce qui justifie la transformation de la première intégrale impropre. Nous savons également que $N(-x) = 1 - N(x)$.

$$\text{D'où, } 1 - N\left(\frac{\ln(X) - \mu}{s} - s\right) = N\left(\frac{-\ln(X) + \mu}{s} + s\right).$$

Puisque $\mu = \ln[E(S)] - \frac{s^2}{2}$, on trouve que :

$$N\left(\frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) + \frac{s^2}{2}}{s}\right) = N(d_1) \quad (15)$$

La deuxième intégrale s'élabore de la même manière et l'on obtient $N(d_2)$.

On trouve donc que :

$$E(S - X)^+ = e^{\mu + \frac{s^2}{2}} N(d_1) - XN(d_2) \quad (16)$$

où $e^{\mu + \frac{s^2}{2}} = E(S)$. Il est à remarquer que μ , soit l'espérance de $\ln(S)$, est toujours présent dans l'équation (16). On sait qu'une variable très rapprochée de cette espérance, soit

$E\left[\ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)\right]$, est le rendement espéré du prix de l'action, une variable difficile à estimer

puisqu'elle incorpore une prime de risque, et par conséquent le prix du risque. Un déplacement dans l'univers neutre au risque nous permettra d'effacer ces variables gênantes.

Pour compléter la preuve, situons-nous donc dans un univers neutre au risque et supposons un call (c) écrit sur une action S_T qui ne paie pas de dividende et qui échoit à T . Le taux sans risque est désigné par r_f et la volatilité du rendement de l'action, par σ .

Dans un tel univers, on a :

$$c = e^{-r_f T} E^Q(S_T - X)^+ = e^{-r_f T} \left[E^Q(S_T)N(d_1) - XN(d_2) \right] \quad (17)$$

Comme S_T est une martingale dans un univers neutre au risque, on peut écrire en vertu de l'équation (3)¹⁰:

¹⁰ Dubois et Girerd-Potin (2001) fournissent une preuve de cette équation. Nous en présentons ici une version détaillée. Comme le prix de l'action obéit à un processus brownien géométrique, il admet, comme nous le savons, la solution exacte suivante: $S = S_t e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\varepsilon_t}$ où $\varepsilon_t \sim N(0,1)$. On veut évaluer l'intégrale suivante:

$E^Q(S_{t+\Delta t}) = \int_0^\infty S f(S) dS$. Pour évaluer cette intégrale, il suffit d'effectuer le changement de variable qui suit.

Comme l'indique la formule de S , le logarithme de S suit une loi normale: $N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t; \sigma^2 t\right)$. Définissons la

variable centrée réduite suivante: $y = \frac{\ln\left(\frac{S}{S_t}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$. En fait, cette variable, qui nous sert ici à

transformer l'intégrale, est la variable aléatoire ε de la fonction S . Puisque $\varepsilon \sim N(0,1)$, sa fonction de densité est

donc de: $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Pour exprimer la distribution de S en fonction de cette variable, il suffit d'exprimer

la transformation jacobienne suivante: $f(S) = \frac{dy}{dS} f(y) = \frac{1}{\sigma S \sqrt{\Delta t}} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$. Nous rappelons que nous voulons

calculer l'espérance neutre au risque de S en changeant la variable S par la variable y . Nous venons d'exprimer $f(S)$ en fonction de y . L'expression de S en fonction de y est immédiate puisque c'est le terme ε de cette fonction.

Pour exprimer dS en termes de dy , on isole y dans l'équation de S . On obtient: $y = \varepsilon = \frac{\ln(S/S_0) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t}{\sigma\sqrt{\Delta t}}$;

$dy = \frac{1}{\sigma\sqrt{\Delta t}S} dS \rightarrow dS = \sigma\sqrt{\Delta t}S dy$. On a donc toutes les données requises pour résoudre l'intégrale en cause en changeant la variable S par la variable y .

$E^Q(S_{t+\Delta t}) = \int_0^\infty S \times f(S) \times dS = \int_{-\infty}^\infty S_t e^{\sigma\sqrt{\Delta t}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} \times \frac{1}{\sigma S \sqrt{\Delta t} \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} \times \sigma\sqrt{\Delta t}S dy$. A remarquer que la variable y , égale à ε , fluctue dans l'intervalle: $[-\infty, +\infty[$ Ce qui se ramène à:

$$E^Q(S_T) = e^{r_f T} S_0 \quad (18)$$

On a finalement:

$$c = e^{-r_f T} \left[S_0 e^{r_f T} N(d_1) - X N(d_2) \right] = S_0 N(d_1) - X e^{-r_f T} N(d_2) \quad (19)$$

soit l'équation de Black et Scholes.

Selon l'équation (15), d_1 est égal à, sachant que $s = \sigma\sqrt{T}$:

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{E(S)}{X}\right) + \frac{s^2}{2}}{s} = \frac{\ln\left(\frac{e^{r_f T} S_0}{X}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln(e^{r_f T} S_0) - \ln(X) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \\ &= \frac{r_f T + \ln(S_0) - \ln(X) + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned} \quad (20)$$

On a finalement:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + r_f T + \frac{1}{2}\sigma^2 T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (21)$$

qui peut être aussi réécrit comme:

$E^Q = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} S_t e^{\sigma\sqrt{\Delta t}y + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} dy$. On a: $E^Q = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2 + \sigma\sqrt{\Delta t}y} dy$. En complétant le

carré dans l'exposant de l'intégrale, on trouve: $E^Q = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{\Delta t})^2 + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} dy$.

$E^Q = S_t e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(y - \sigma\sqrt{\Delta t})^2} dy$. $E^Q = S_t e^{r\Delta t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(1 - \sigma\sqrt{\Delta t})y^2} dy$. La transformation linéaire

de l'exposant n'affectant pas la probabilité cumulative, on a, puisque la probabilité cumulative sous la normale standard est de 1: $E^Q(S_{t+\Delta t}) = S_t e^{r\Delta t}$, ce qui est le résultat recherché. La valeur présente du prix de l'action est bien une martingale dans l'univers neutre au risque quand ce prix suit un processus lognormal. On trouvera une version abrégée de cette preuve dans: Dubois, M. et Girerd-Potin (2001), Exercices de théorie financière et de gestion de portefeuille, De Boeck Université. Pour la transformation jacobienne d'une distribution, on consultera: Racicot, F.-É. et Théoret, R.(2001), Traité d'économétrie financière, Presses de l'université du Québec, chap. 1. Pour une autre preuve de ce résultat, voir: De la Granville, O.(2001), Bond Pricing and Portfolio Analysis, the MIT Press, chap. 16.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + r_f T}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T} \quad (22)$$

Comme on vient de le constater, la preuve de l'équation de Black et Scholes exige certaines connaissances en statistique. Elle requiert une bonne compréhension des distributions normale et lognormale et des opérations qui leur sont associées. Elle requiert également une maîtrise de l'univers neutre au risque et de la notion de martingale. Nous avons eu à cœur, dans la preuve qui précède, de n'escamoter aucune de ces notions de base en ingénierie financière.

Il existe d'autres façons de prouver la formule de Black et Scholes. L'une d'elles solutionne directement l'équation différentielle de Black et Scholes plutôt que de recourir à la notion d'espérance neutre au risque comme pour la preuve que nous venons de fournir. À l'aide de changements de variables, on en arrive à transformer l'équation différentielle de Black et Scholes en équation de la chaleur, dont la solution est connue depuis bien longtemps.

3. Les grecs

Les sensibilités du prix du call à ses divers paramètres sont couramment regroupées sous le vocable «les grecs» dans la littérature financière. Ces «grecs» sont de toute première importance s'agissant de la couverture des portefeuilles. Les sections qui suivent donnent les principaux grecs.

3. 1. Le delta du call

Le delta mesure la sensibilité du prix de l'option au prix de son sous-jacent, c'est-à-dire une action dans le cas d'une option écrite sur une action. Le delta d'un call, calculé à partir de la formule de Black et Scholes, est égal à :

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Delta = N(d_1)$$

Cette formule est le résultat d'une dérivation laborieuse puisque d_1 et d_2 sont eux-mêmes fonction de S dans la formule de Black et Scholes. Nous fournissons, au tableau 1, le calcul détaillé de cette dérivée pour le lecteur exigeant et féru de mathématiques¹¹.

Tableau 1 : Dérivation détaillée du delta :

En vertu de la formule de B-S, la valeur d'un call européen est égale à :

$$C(S, t) = SN(d_1) - Xe^{-r(T-t)}N(d_2)$$

où $d_1 = \left(\ln(S/X) + (r + 1/2\sigma^2)(T-t) \right) / \sigma\sqrt{(T-t)}$,

$d_2 = \left(\ln(S/X) + (r - 1/2\sigma^2)(T-t) \right) / \sigma\sqrt{(T-t)}$. Le delta d'un call, qui est la dérivée partielle du call par rapport au prix de l'action p , est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + S \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - Xe^{-r(T-t)} \frac{\partial}{\partial S} N(d_2) \\ &= N(d_1) + SN'(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial S} - Xe^{-r(T-t)} N'(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial S} \end{aligned}$$

¹¹ Nous nous inspirons des documents suivants : Black, F. & M. Scholes (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, May-June, 637-659; Galai, D. & R. Masulis (1976), *The Option Pricing Model and the Risk Factor of Stock*, Journal of Financial Economics, January-March, 53-82; Wilmott et al.(1995), *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press, Cambridge, chap.5.

où $\frac{\partial d_1}{\partial S} = \frac{1/S}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $\frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1/S}{\sigma\sqrt{T-t}}$. Cela implique

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) + \left[SN'(d_1) - Xe^{-r(T-t)} N'(d_2) \right] \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}}$$

Pour compléter la preuve, il nous reste à démontrer que : $SN'(d_1) = Xe^{-r(T-t)} N'(d_2)$. Il nous faut donc calculer la dérivée partielle de $N(d_1)$ et de $N(d_2)$. Calculons ces dérivées.

Nous savons que : $N(d_1) = \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$, $N(-\infty)=0$, $N(+\infty)=1$ et que la dérivée d'une

intégrale bornée est la primitive évaluée à ses bornes¹². Alors :

$$N'(d_1) = \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_1)^2/2}$$

$$N'(d_2) = \frac{\partial N(d_2)}{\partial S} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(d_2)^2/2}$$

Pour faciliter les calculs, considérons la représentation suivante :

$$S \frac{N'(d_1)}{N'(d_2)} = Xe^{-r(T-t)}$$

de l'équation dont on doit prouver l'égalité. En remplaçant les $N(\cdot)$ par leurs valeurs respectives, on obtient :

$$Se^{1/2(d_2^2 - d_1^2)} = Xe^{-r(T-t)}$$

$$\Rightarrow Se^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)} \left[(\ln(S/X))^2 + (r-1/2\sigma^2)^2(T-t)^2 + 2(r-1/2\sigma^2)(T-t)\ln(S/X) - (\ln(S/X))^2 + (r+1/2\sigma^2)(T-t)^2 + 2(r+1/2\sigma^2)(T-t)\ln(S/X) \right]}$$

$$= Se^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)} \left[r^2(T-t)^2 - r\sigma^2(T-t)^2 + 1/4\sigma^4(T-t)^2 + 2r\ln(S/X)(T-t) - \sigma^2(T-t)\ln(S/X) - r^2(T-t)^2 - 1/4\sigma^4(T-t)^2 - r\sigma^2(T-t)^2 - 2r\ln(S/X)(T-t) \right]}$$

$$\times e^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)} \left[-\sigma^2(T-t)\ln(S/X) \right]}$$

¹² Exemple : $\frac{d}{dx} \left(\int_0^x y dy \right) = x$ parce que $\int_0^x y dy = y^2/2 + c \Big|_0^x = x^2/2$ et donc $\frac{d}{dx} x^2/2 = x$

$$= S e^{\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}[-2\sigma^2(T-t)\ln(S/X) - 2r\sigma^2(T-t)^2]} \Rightarrow S e^{-[\ln(S/X) + r(T-t)]} = X e^{-r(T-t)}$$

Finalement, en prenant le logarithme de chaque membre de cette dernière relation, on a :

$$\ln S - \ln(S/X) - r(T-t) = \ln X - r(T-t) \Rightarrow \ln S - \ln X = \ln(S/X)$$

Il résulte que:

$$\frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \text{ QED.}$$

Le delta revêt une importance particulière dans la théorie des produits dérivés, notamment au chapitre de la couverture d'un portefeuille. Pour couvrir un portefeuille, si l'on détient une action, il faut en effet vendre à découvert $\frac{1}{\Delta}$ calls pour disposer d'un portefeuille couvert, c'est-à-dire exempt de risque. Le ratio $\frac{1}{\Delta}$ est appelé ratio de couverture. On parle alors de delta-hedging ou couverture par le delta.

Pour établir cette relation, supposons que nous détenions une action S et que nous ayons vendu à découvert sC calls. Nous voulons trouver le s qui donne un delta-hedging, c'est-à-dire :

$$dS - s dC = 0 \quad (23)$$

L'approximation du premier degré de dC est égale à, en vertu de la série de Taylor :

$$dC = \Delta dS \quad (24)$$

En substituant (24) dans (23), on obtient :

$$dS - s\Delta dS = 0 \rightarrow s = \frac{1}{\Delta}$$

Donc pour détenir un portefeuille «delta-hedged», il faut, si l'on détient une action, avoir vendu à découvert $\frac{1}{\Delta}$ calls. De façon alternative, si l'on a vendu 1 call à découvert, il faut détenir ΔS actions de façon à avoir un portefeuille «delta-hedged».

Certes, pour que le portefeuille ainsi défini demeure couvert, il faut que sa composition soit modifiée continuellement car le delta du call ne cesse de se modifier. En l'occurrence, le delta de l'option se modifie à chaque fois que change le prix de l'action. On dit alors qu'il faut effectuer un rééquilibrage dynamique du portefeuille pour le maintenir couvert. Pour éviter des coûts de transactions inutiles, il est approprié de prendre en compte le gamma du call lorsque l'on couvre un portefeuille, qui fait l'objet de la prochaine section.

3.2. Le gamma du call

Le gamma du call est la dérivée du delta du call en regard du prix de l'action. C'est donc la dérivée seconde du prix du call en regard du prix de l'action. Le gamma du call est égal à l'expression suivante :

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S \sqrt{T}}$$

Pour juger de l'importance du gamma, faisons cette fois-ci une expansion du second degré du prix du call :

$$dC = \Delta dS + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dS^2 = \Delta dS + \frac{1}{2} \Gamma dS^2 \quad (25)$$

Mais comme $\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$, on peut réécrire l'équation 25 comme suit :

$$dC = \Delta dS + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial S} dS^2 = \left(\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial \Delta}{\partial S} dS \right) dS = \left(\Delta + \frac{1}{2} d\Delta \right) dS$$

En substituant cette équation dans l'équation (24), on obtient :

$$dS - s \left(\Delta + \frac{1}{2} d\Delta \right) dS = 0 \rightarrow s = \frac{1}{\Delta + \frac{1}{2} d\Delta}$$

C'est ce qu'on appelle la technique de couverture delta-gamma. Le ratio de hedging prend alors en compte les changements du delta qui surviennent à la suite des modifications du prix de l'action. La couverture delta-gamma exige donc beaucoup moins de rééquilibrages que la simple couverture delta car elle prend en compte les changements du delta au voisinage du prix actuel de l'action. Quand une action est très en-dehors de la monnaie ou très dans la monnaie, son delta ne se modifie que très peu et une couverture delta paraît alors appropriée. Mais une couverture delta-gamma donnera des résultats beaucoup plus précis dans les autres situations. Elle exigera moins de rééquilibrages.

Comment opérationnaliser la couverture gamma en pratique. Il est certain que puisque l'on veut effectuer une couverture en addition de la couverture delta, il faut ajouter au portefeuille delta neutre une autre option qui puisse ramener le gamma du portefeuille à 0. Disons qu'une option ait un gamma de Γ_1 et que le portefeuille delta neutre ait une position gamma égale à Γ . Le nombre d'options à acheter ou à vendre pour rendre le portefeuille gamma neutre, disons n_1 , doit satisfaire la relation suivante :

$$n_1 \Gamma_1 + \Gamma = 0 \rightarrow n_1 = -\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$$

Mais la position delta du portefeuille s'est modifiée à la suite de cette transaction. Ce changement est égal à $n_1 \times \Delta_1$, où Δ_1 est le delta de la nouvelle option introduite dans le portefeuille. Il faut donc acheter ou vendre un nombre d'actions égal à ce montant pour rendre de nouveau le portefeuille delta neutre¹³.

¹³ Pour plus de détails sur la couverture gamma, voir Hull (2003), p. 313-315 et la section 5 de cet article.

3.3 Le theta du call

Le theta du call est la dérivée du prix du call par rapport au temps. On veut ici mesurer la sensibilité du prix du call à l'écoulement du temps. Le theta est égal à l'expression suivante :

$$\theta = \frac{\partial C}{\partial t} = \left[\frac{S\sigma}{2\sqrt{t}} \right] N'(d_1) + Xe^{-rt} rN(d_2) \quad (26)$$

Dans l'angle de cette formule, le theta d'un call est toujours positif. Plus l'échéance d'un call est éloignée, plus le prix d'un call est important, toutes choses égales d'ailleurs. Mais certains auteurs définissent le theta comme la perte de valeur du call à mesure que le temps passe, c'est-à-dire au fur et à mesure que le prix du call se rapproche de son échéance. Pour eux, le theta du call est alors négatif et ils multiplient alors l'équation (26) par (-1).

L'équation différentielle de Black et Scholes établit une relation entre les trois «grecs» suivants : le delta, le theta et le gamma. Rappelons cette équation :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + (r - \delta)S \frac{\partial C}{\partial S} - rC = 0$$

En remplaçant les dérivées première et seconde par les grecs appropriés dans cette équation, on obtient :

$$\theta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + (r - \delta)S\Delta - rC = 0$$

C'est là la relation qui doit tenir entre les trois «grecs» pour éviter la présence d'arbitrage.

3.4 Le vega d'un call

La volatilité du rendement de l'action est sans doute le paramètre qui influence le plus le prix d'une option. Il ne saurait y avoir d'options sans volatilité du rendement du sous-jacent. Certes, pour les actions classiques, la volatilité est source de risque. Les investisseurs exigent

un rendement espéré supérieur pour assumer davantage de risque. Mais pour le détenteur d'une option, il en va tout autrement. L'acheteur d'une option est en effet protégé puisque son payoff ne saurait être négatif. Certes, il a payé une prime pour s'assurer cette protection. Mais par la suite, c'est la volatilité qui pourra amener le prix de l'action au-delà du prix d'exercice pour un call et en deçà du prix d'exercice pour un put.

Le vega d'un call est la sensibilité d'un call à la volatilité implicite du rendement du prix de l'action. Il se définit comme suit :

$$Vega = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

3.5 Le rho d'un call

Le rho d'un call représente sa sensibilité au taux d'intérêt. Plus le taux d'intérêt est important, plus le prix d'exercice actualisé du call est faible. Par conséquent, plus le prix du call est alors important. En effet, un call équivaut à une fraction d'action financée par un emprunt mais le détenteur de l'option n'a pas à emprunter tant qu'il n'achète par l'action au prix d'exercice. Il s'évite donc des coûts d'emprunts d'autant plus importants que les taux d'intérêt sont élevés. La valeur du call augmente donc à la suite d'une remontée du loyer de l'argent.

La formule du rho d'un call est la suivante :

$$rho = \frac{\partial C}{\partial r} = X(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$$

3.6 Les grecs d'un put

3.6.1 Le delta d'un put

On peut recourir à la parité put-call pour calculer le delta d'un put européen écrit sur une action qui ne verse pas de dividendes. On a la relation suivante entre un put et un call en vertu de la parité put-call :

$$P = C - S + Xe^{-r(T-t)}$$

Le delta du put est la dérivée de cette expression par rapport à S :

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - 1 = N(d_1) - 1$$

Comme $N(d_1) < 1$, le delta d'un put est toujours négatif. Le prix d'un put est d'autant plus élevé que le prix de l'action se situe en deçà du prix d'exercice.

3.6.2 Le gamma d'un put

Le gamma est la dérivée du delta par rapport au prix de l'action. C'est si l'on veut la convexité du put. Le gamma d'un put est égal au gamma d'un call, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{\sigma S \sqrt{T-t}}$$

3.6.3 Le theta d'un put

Le theta d'un put européen se définit comme suit :

$$\theta = \frac{\partial P}{\partial t} = \left[\frac{S\sigma}{2\sqrt{t}} \right] N'(d_1) - Xe^{-rt} r N(d_2)$$

C'est la même expression que le theta d'un call européen à cette différence près que le second terme est précédé d'un signe négatif plutôt que d'un signe positif. Tout comme pour un call, le temps exerce un effet positif sur le premier terme de l'équation de Black et Scholes pour un put européen. Mais son effet sur le second terme est négatif et si ce terme

domine, le prix d'un put peut diminuer avec sa durée. En effet, lorsqu'un put européen est très dans la monnaie, son prix peut être inférieur à sa valeur intrinsèque. Or, s'il était exercé à ce moment-là, son payoff serait égal à sa valeur intrinsèque. Une échéance inférieure serait alors un atout pour ce put.

3.6.4 Le vega d'un put

Le vega d'un put est égal au vega d'un call, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t}N'(d_1)$$

3.6.5 Le rho d'un put

La valeur intrinsèque d'un put se définit comme suit :

$$\text{valeur intrinsèque} = Xe^{-r(T-t)} - S$$

Une hausse du taux d'intérêt se traduit donc par une diminution de la valeur intrinsèque d'un put. Il existe par conséquent une relation négative entre le prix d'un put et le taux d'intérêt. La formule du rho d'un put est la suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial r} = -X(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$$

3.6.6 Représentation graphique des grecs à l'aide d'Excel

Nous voulons représenter le delta et le theta à l'aide d'Excel. Pour ce faire, nous faisons appel à un graphique en trois dimensions. Nous aurons donc un graphique à trois axes : x, y et z. Sur l'axe des x apparaîtra le delta, sur l'axe des y, le theta et sur l'axe des z, le prix de l'option. La fonction Excel (Visual Basic) utilisée pour effectuer ce graphique se retrouve au tableau 2.

Tableau 2 : Programme Visual Basic de la formule de Black et Scholes

Function BS(S, X, rf, T, sig)

$$d1 = ((\text{Log}(S / X) + (rf * T)) / (\text{sig} * \text{Sqr}(T))) + 0.5 * \text{sig} * \text{Sqr}(T)$$

$$d2 = d1 - \text{sig} * \text{Sqr}(T)$$

$$Nd1 = \text{Application.NormSDist}(d1)$$

$$Nd2 = \text{Application.NormSDist}(d2)$$

$$BS = S * Nd1 - X * \text{Exp}(-rf * T) * Nd2$$

End Function

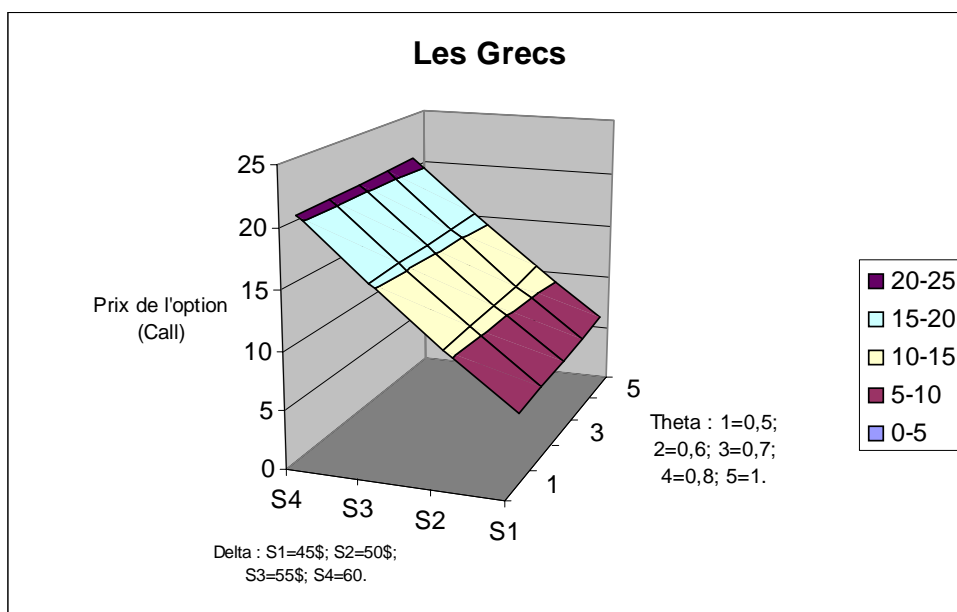
La procédure pour effectuer un graphique 3D dans *Excel* est la suivante. Il faut : 1) programmer la fonction que l'on désire représenter, par exemple la formule de B&S; 2) évaluer la fonction pour différentes valeurs sur les axes x et y, d'où l'on obtient les valeurs de z. Dans Excel, il suffit de choisir dans le menu principal : *Données/Table*; 3) ombrager ensuite la plage à illustrer. Dans notre cas il s'agit d'une matrice ou d'un tableau. Afin de d'illustrer la procédure, considérons le tableau 3.

Tableau 3

S	50						
x	40						
rf	0,02						
T	0,5				S(delta)		
sig	0,2	10,528078	45	50	55	60	
BS=	10,528078	0,5	5,99276998	10,528078	15,4205802	20,401276	
		0,6	6,2102591	10,6704694	15,5196519	20,4852474	
		Theta	0,7	6,42050151	10,8177711	15,6244643	20,5720265
			0,8	6,62381612	10,9678956	15,7341227	20,6617957
			1	7,01162259	11,2714266	15,9644793	20,8499877

Dans ce tableau, *BS* est la fonction Excel (Visual Basic) rapportée à l'extrémité de la matrice bordée par les différentes valeurs choisies pour *S* (45, 50, 55, 60) et l'échéance *T* (0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 1). Les chiffres à l'intérieur de la matrice ont été obtenus à l'aide de la commande *Table* du menu *Données*. Il suffit d'ombrager la matrice. Le graphique en trois dimensions obtenu à partir de la matrice du tableau 3 se trouve à la figure 3.

Figure 3



4. L'équation de Black et Scholes généralisée

La version généralisée de l'équation de Black & Scholes (1973) incorpore un terme additionnel qui permet de couvrir une panoplie de modèles. En vertu de cette généralisation, elle pourra donc s'appliquer à de nombreux cas de *pricing* d'options. En effet, la BS généralisée permet le *pricing* d'options européennes sur actions, sur actions avec dividendes, sur des contrats à terme de même que le *pricing* d'options sur devises. Le résultat analytique de la BS généralisée est donné par :

$$c_{BSG} = Se^{(b-r)T} N(d_1) - Xe^{rT} N(d_2)$$

pour le cas de l'option d'achat (call). L'option de vente (put) se formule comme suit :

$$p_{BSG} = Xe^{rT} N(-d_2) - Se^{(b-r)T} N(-d_1)$$

Ce dernier résultat résulte de l'application de la parité put-call. d_1 et d_2 ont des formes similaires aux résultats classiques de BS et sont donnés par :

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (b + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

où b est le coût de portage¹⁴, exprimé en pourcentage, associé à la détention du sous-jacent. En fait, c'est de ce paramètre que la formule de la BS généralisée tire son originalité. En effet, selon la valeur qu'il prendra, plusieurs des différents modèles utilisés dans la pratique apparaîtront. En voici quelques exemples

Si $b = r$, on retrouve la formule classique de Black et Scholes (1973) du prix d'un call européen écrit sur une action ne versant pas de dividendes. Par ailleurs, si $b = r - q$, on renoue avec la formule de Merton d'une option dont le sous-jacent verse un taux de dividende égal à q . Si $b = 0$, c'est la formule de Black (1976) ayant trait à des options écrites sur contrats à terme qui apparaît. Mentionnons ici que cette formule a été écrite originellement pour des contrats sur matières premières mais qu'elle fut par la suite transposée à des options européennes sur contrats à terme, puis à des options européennes sur obligations. Finalement, si $b = r - r_e$, r étant le taux d'intérêt domestique et r_e , le taux d'intérêt étranger, on retrouve la formule de Garman et Kohlhagen (1983) ayant trait à des options sur devises. Le taux d'intérêt étranger est en effet assimilable à un dividende payé par le sous-jacent. C'est donc une simple transposition de la version de la BS généralisée avec dividende. Dans ce dernier modèle, on n'a qu'à poser $q = r_e$ pour obtenir la BS généralisée avec dividendes.

¹⁴ *Cost-of-carry*, en anglais.

Il est très simple d'implanter cette formule dans le langage de programmation d'Excel. Le tableau 4 fournit une fonction écrite en Visual Basic (Excel) pour calculer la formule de la BS généralisée¹⁵.

Tableau 4 : Programme VBA de la formule de Black & Scholes généralisée.

```
Function gBlackScholes(callput_indicateur As String, S, X, T, r, b, v)  
  
d1 = (Log(S / X) + (b + v ^ 2 / 2) * T) / (v * Sqr(T))  
  
d2 = d1 - v * Sqr(T)  
  
If callput_indicateur = "C" Then  
  
gBlackScholes = S * Exp((b - r) * T) * Application.NormSDist(d1) - X * Exp(-r * T) *  
Application.NormSDist(d2)  
  
ElseIf callput_indicateur = "P" Then  
  
gBlackScholes = X * Exp(-r * T) * Application.NormSDist(-d2) - S * Exp((b - r) * T) *  
Application.NormSDist(-d1)  
  
End If  
  
End Function
```

Il est à remarquer que dans ce programme VBA, on utilise la fonction indicatrice *callput_indicateur* dans le but de généraliser l'utilisation du programme à la fois au *pricing*

¹⁵ Cette fonction s'inspire de Haug (1998).

d'un call et d'un put simplement en indiquant au programme la lettre C pour un call ou P pour un put dans une cellule Excel.

Pour illustrer l'utilisation de ce programme, considérons l'exemple suivant. Supposons que l'on désire valoriser un call. Dans la cellule Excel du tableau 5, on tape C . Supposons également les données suivantes. Le prix de l'action S est de 100 ; le prix d'exercice X , de 90 ; l'échéance T est fixée à 0,5 an; le taux d'intérêt est de 2% ; b est égal à 0,02 et $\nu = \text{sigma} = 0,3$. Le résultat du *pricing* d'un call en recourant à la BS généralisée est présenté au tableau 5.

Tableau 5 : Résultat de la formule de Black & Scholes généralisée pour le cas d'un call européen sur action

	Black et Scholes généralisée	
	Cou P	C
S		100
X		90
T		0,5
r		0,02
b		0,02
$\nu = \text{sigma}$		0,3
	B&S géné.	14,5814104

En vertu de la formule de la BS généralisée, le prix du call est donc de 14,58 \$.

5. La couverture delta et la couverture delta –gamma en action

Tout portefeuille qui duplique exactement les flux monétaires d'une option devrait comporter un coût égal au prix de l'option. Ce principe peut sembler évident mais ses implications sont cruciales s'agissant de l'évaluation des produits dérivés. L'une des

conditions à la duplication parfaite des flux monétaires d'une option est que les marchés financiers doivent être complets. Selon Rebonato (2004)¹⁶, si les marchés financiers sont incomplets, il n'existe plus un prix unique pour l'actif contingent et c'est alors l'offre et la demande d'options qui imposeront un prix et non le phénomène de l'arbitrage. Le prix de l'actif contingent est alors déterminé simultanément avec le prix du risque dans le cadre d'un modèle d'équilibre général. Il est à noter que dans le modèle de Black et Scholes, le jeu de l'offre et de la demande ne joue aucun rôle puisque le prix d'un actif contingent est alors déterminé par arbitrage, c'est-à-dire en recourant au portefeuille dupliquant.

5.1 Couverture delta

Nous supposons donc que les marchés financiers sont complets. Nous voulons dupliquer un call européen (c) à partir d'un portefeuille composé d'actions (S) et d'un emprunt B . Ce portefeuille s'écrit :

$$c = hS - B$$

avec h le ratio de couverture.

On peut réécrire cette équation comme suit

$$hS - B - c = 0 \quad (27)$$

On veut calculer le ratio de hedging h , qui élimine le risque de ce portefeuille. Une expansion de Taylor du premier degré pour c donne :

$$\Delta c = \delta \Delta S$$

où $\delta = \frac{\partial C}{\partial S}$, est le delta du call, soit la sensibilité du prix call à son sous-jacent qui est égal à

$N(d_1)$ dans le modèle de Black et Scholes.

On a :

¹⁶ Rebonato, R.(2004), Volatility and Correlation, 2^{ème} édition, John Wiley & Sons.

$$h\Delta S - \Delta B - \Delta c = h\Delta S - \Delta B - \delta\Delta S$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$(h - \delta)\Delta S + \Delta B$$

Pour éliminer le risque du portefeuille, soit ΔS , il faut que :

$$h - \delta = 0 \rightarrow h = \delta$$

Le delta hedging est dynamique. Il faut continuellement ajuster le delta du call pour avoir un portefeuille couvert.

Reprenons le portefeuille couvert V donné par l'équation (27), portefeuille qui réplique un call. À l'instant 0, il doit être égal à :

$$V_0 = \delta_0 S_0 - B_0 - c_0 = 0 \quad (28)$$

Ce portefeuille est autofinancé en ce sens que l'écart entre le portefeuille d'actions et l'emprunt provient de la prime touchée lors de la vente du call, soit c_0 , qui constitue le prix de l'option.

A l'instant 1, le delta du call se sera modifié et le portefeuille couvert devra être modifié comme suit :

$$V_1 = \delta_1 S_1 - B_1 - c_1 = 0$$

La variation de la dette sera égale à :

$$B_1 - B_0 = \delta_1 S_1 - \delta_0 S_0 - \Delta c$$

Or, en vertu d'une expansion de Taylor du premier degré :

$$\Delta c = \delta\Delta S = \delta_0 (S_1 - S_0)$$

On a donc :

$$B_1 - B_0 = \delta_1 S_1 - \delta_0 S_0 - \delta_0 S_1 + \delta_0 S_0 = (\delta_1 - \delta_0) S_1$$

Autrement dit, la variation de l'emprunt est égale au montant qu'il faut investir dans l'actif sous-jacent pour demeurer couvert. Et l'on doit répéter cette procédure à chaque période pour demeurer couvert.

A quoi sera égal le portefeuille de couverture à l'échéance T de l'option. Sa valeur sera toujours nulle puisqu'il a été rebalancé continuellement. On aura :

$$V_T = \delta_T S_T - B_T - c_T = 0$$

Si l'option est hors-jeu, c'est-à-dire que c_T est nul, δ_T sera alors nul et la dette accumulée B_T sera nulle. Par contre, si l'option est en jeu, δ_T sera alors égal à un 1 et c_T vaudra sa valeur intrinsèque :

$$c_T = S_T - X$$

où X est le prix d'exercice de l'option. La dette sera alors de :

$$B_T = S_T - (S_T - X) = X$$

Celui qui a écrit le call reçoit alors de l'acheteur le prix d'exercice X , ce qui lui permet de rembourser sa dette.

Une façon de vérifier si le delta hedging reproduit bien la valeur de l'option d'achat telle que donnée par l'équation de Black et Scholes est de réécrire l'équation (28) comme ceci :

$$B_0 + C_0 = \delta_0 S_0 \quad (29)$$

On calcule le terme de gauche à partir de celui à droite car on ne connaît pas alors C_0 . Et à chaque simulation, on ajoute à ce montant l'ajout (ou le retrait) à la dette requis pour maintenir la position couverte. Par exemple, à l'instant 1 on aura :

$$B_0 + C_0 + S_1(\delta_1 - \delta_0)^{17}$$

A la fin de la simulation, on pourra identifier C_0 car on connaît alors la dette finale. Si l'option est hors-jeu à son échéance, alors la dette est nulle comme on l'a vu auparavant et le

¹⁷ On suppose ici pour simplifier que le taux d'intérêt est nul.

montant simulé est égal à C_0 . Par contre, si l'option est en jeu à l'échéance de l'option, la dette est égale à X et le montant simulé est égal à $(X+C_0)$. Il suffira donc de soustraire X du montant simulé pour récupérer le prix de l'option d'achat.

Nous voulons reproduire le call européen dont les paramètres sont les suivants à partir du delta hedging :

$$S = 100$$

$$X = 100$$

$$T = 0,25$$

$$r = 0\%$$

$$\text{sigma} = 0,2$$

Selon la formule de Black et Scholes, le prix de ce call est de 3,98 \$. C'est ce prix que devra nous permettre de récupérer la simulation. Nous serons alors à même de juger de la précision de la couverture.

Le chiffrier suivant détaille les calculs de nos simulations :

	O	P	Q	R	S	T
4		T	S	N(d1)	diff. delta	B+C
5	0	0,25	100	0,51993881	0,519939	51,99388
6	1	0,230769	98,06560526	0,43830322	-0,081636	-8,005643
7	2	0,211538	99,24486065	0,48547751	0,047174	4,681806
8	3	0,192308	101,1140627	0,56756306	0,082086	8,300003
9	4	0,173077	101,9116218	0,60610537	0,038542	3,92791
10	5	0,153846	98,76379031	0,45250087	-0,153604	-15,17056
11	6	0,134615	103,3021194	0,68418106	0,23168	23,93305
12	7	0,115385	101,7232447	0,61235501	-0,071826	-7,306378
13	8	0,096154	97,6471412	0,36207687	-0,250278	-24,43894
14	9	0,076923	99,51489708	0,47610531	0,114028	11,34753
15	10	0,057692	98,12958262	0,35605396	-0,120051	-11,78059
16	11	0,038462	100,44124	0,55245198	0,196398	19,72646
17	12	0,019231	95,75480731	0,06054709	-0,491905	-47,10226
18	13	0	96,22661618	0	-0,060547	-5,826241
19						4,280025

Nous avons divisé la période de simulation en trimestres. T varie de 0,25 à 0, soit la date de la fin de la simulation. Nous avons simulé le prix de l'action sur les 13 semaines à partir du mouvement brownien géométrique suivant, où le trend est nul puisque l'on suppose que le taux d'intérêt est nul :

$$dS = \sigma S dz = \sigma S \varepsilon \sqrt{dt}$$

Le programme de la simulation du prix de l'action apparaît au tableau 6. A noter que la volatilité de l'action est de 0,2 selon les données du problème.

Tableau 6 Simulation d'un portefeuille dupliquant un call

Sub delta1()

$s = 100$

$sigma = 0.2$

$T = 0.25$

$N = 13$

$dt = T / N$

$s = 100$

$Range("Stock1").Offset(0, 0) = s$

For $i = 1$ *To* N

$s = s + s * Application.WorksheetFunction.NormSInv(Rnd) * sigma * Sqr(dt)$

$Range("stock1").Offset(i, 0) = s$

Next i

End Sub

Puis nous calculons les $N(d_1)$ correspondant à ces prix dans la colonne R du chiffrier en recourant à la formule de Black et Scholes. Pour la cellule $R5$, $T = 0,25$. Pour la cellule $R6$, T

= 0,23, et ainsi de suite. Dans la colonne *S*, nous calculons la différence des deltas d'une période à l'autre.

Dans la colonne *T*, nous appliquons la formule (29) de manière à calculer la valeur du call. Selon les explications antérieures :

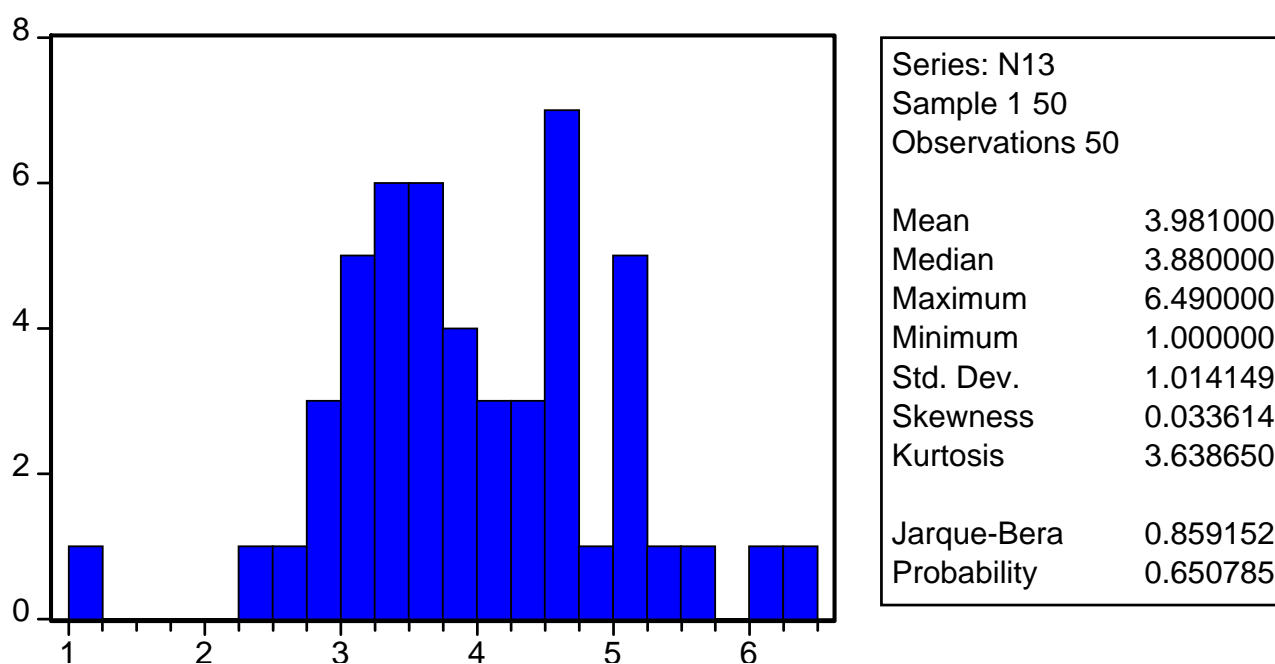
$$T5 = S5 * Q5$$

$$T6 = S6 * Q6$$

Nous cumulon les résultats de la colonne *T* et nous obtenons une valeur de 4,28\$ pour le call en regard de sa valeur donnée par l'équation de Black et Scholes, soit 3,98\$.

Nous avons repris l'exercice 50 fois et nous avons reporté les résultats sur l'histogramme que l'on retrouve à la figure 4.

Figure 4

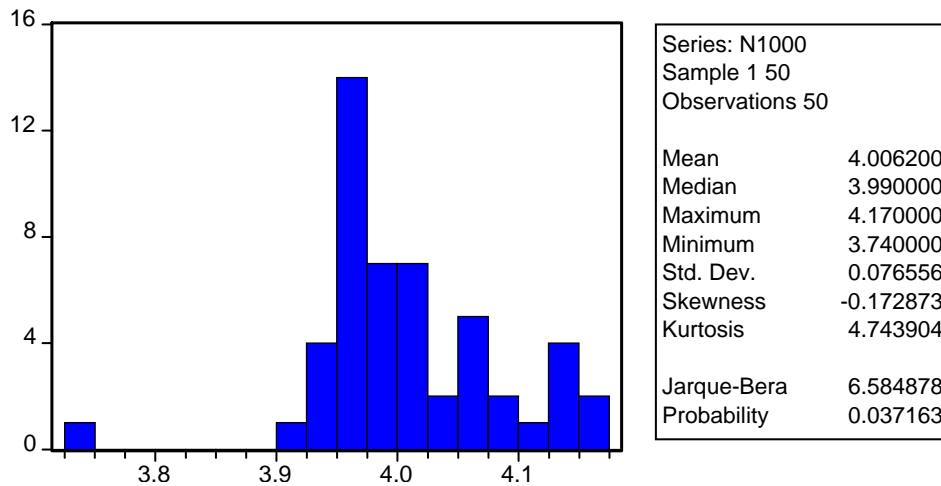


La moyenne des simulations est bien centrée sur la vraie valeur du call, soit 3,98 \$. Mais nous constatons que l'écart-type, à hauteur de 1,01, est important. Les valeurs estimées

s'étirent de 1\$ à 6,49\$. Certes, un rééquilibrage à la semaine comme sur cette figure est loin d'être continu, comme l'exige la théorie.

Au lieu de diviser le trimestre en semaines comme dans la figure précédente, nous le scindons en 1000. Nous refaisons le même exercice et nous obtenons la figure 5.

Figure 5



La moyenne des simulations est somme toute égale au prix donné par l'équation de Black et Scholes et l'écart-type de la simulation s'est beaucoup réduit. Il n'est plus que de 0,07. La valeur minimale est de 3,74 et la valeur maximale de 4,17, des valeurs somme toute très rapprochées de la cible de 3,98\$.

5.2 Couverture delta-gamma

On introduit une autre option pour couvrir le risque relié à l'évolution du gamma. On a pour la valeur du portefeuille:

$$-c_1 + hS + kc_2 - B = 0$$

On veut calculer h et k qui éliminent le risque du portefeuille. En termes de variations, le portefeuille s'écrit :

$$-\Delta c_1 + h\Delta S + k\Delta c_2 - \Delta B = 0$$

Une expansion de Taylor du second degré donne :

$$\Delta c_1 = \delta_1 \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma_1 \Delta S^2$$

$$\Delta c_2 = \delta_2 \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma_2 \Delta S^2$$

En substituant ces valeurs dans le portefeuille et en regroupant les termes, on a :

$$(-\delta_1 + h + k\delta_2)\Delta S + \frac{1}{2}(-\Gamma_1 + k\Gamma_2)\Delta S^2 + \Delta B = 0$$

Pour faire disparaître les facteurs de risque ΔS et ΔS^2 , il faut que¹⁸ :

$$-\delta_1 + h + k\delta_2 = 0 \rightarrow h = \delta_1 - k\delta_2$$

$$-\Gamma_1 + k\Gamma_2 = 0 \rightarrow k = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$$

On peut effectuer le même exercice que dans le cas du delta-hedging, c'est-à-dire simuler sur la valeur de la dette et le prix du call à couvrir de façon à récupérer en bout de piste le prix du call et vérifier la justesse de la simulation.

A chaque période, il suffit de ramener à 0 le portefeuille suivant :

$$V = hS - c_1 + kc_2 - B = 0$$

avec $k = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ et $h = \delta_1 - k\delta_2$.

A la fin de la simulation, soit à l'échéance de l'option c_1 , on a :

$$\Gamma_1 = 0 \rightarrow k = 0$$

¹⁸ A noter que $\delta = N(d_1)$, $gamma = \frac{n(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}}$ avec $n(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d_1^2}$.

$$h = \delta_1$$

L'option c_2 disparaît donc du portefeuille de couverture. Elle n'a servi qu'à rendre plus précise l'opération de couverture. Elle a joué le rôle de variable de contrôle, encore appelée variable subsidiaire.

Si l'option 1 est en jeu à sa date d'échéance, on a :

$$h = \delta_1 = 1$$

$$V_T = S_T - B_T - C_T = 0$$

Et puisque $C_T = S_T - X$, on retrouve $B = X$. Si par ailleurs l'option 1 est hors-jeu à son échéance, $\delta_1 = 0$ et $B = 0$. Comme nous allons simuler sur $B + c_1(0)$, nous allons récupérer à la fin de la simulation $c_1(0) + X$ si l'option est en jeu et $c_1(0)$ si l'option est hors-jeu. Et en comparant la valeur simulée de l'option avec sa valeur découlant de l'équation de Black et Scholes, on pourra juger de la justesse de la couverture.

Les deux options qui servent à l'opération de couverture apparaissent au tableau 7. Les paramètres de l'option à couvrir apparaissent à gauche du tableau (c_1) et celle qui sert de variable de contrôle (c_2) apparaît à droite. c_2 a donc une échéance plus éloignée que c_1 : c'est là la seule différence entre les deux options. Le programme Visual Basic ayant trait au calcul du gamma d'une option se retrouve au tableau 8.

Tableau 7 Les deux options de la couverture delta-gamma

	AB	AC	AD	AE	AF
1	S	100		S	100
2	X	100		X	100
3	T	0,25		T	0,5
4	rf	0		rf	0
5	sigma	0,2		sigma	0,2
6					
7	Prix call	3,987761			5,63719778
8	N(d1)	0,519939			0,52818599
9	d1	0,05			0,07071068
10	n(d1)	0,398444			0,39794617
11	gamma	0,039844			0,02813904

Tableau 8 : Programme Visual Basic du calcul du gamma d'une option

Function done(s, x, T, rf, sigma)

$$Num = \text{Log}(s / x) + (rf + 0.5 * \text{sigma}^2) * T$$

$$done = Num / (\text{sigma} * \text{Sqr}(T))$$

End Function

Function gamma(s, x, T, rf, sigma)

$$nd1 = (1 / \text{Sqr}(2 * \text{Application.Pi})) * \text{Exp}(-0.5 * done(s, x, T, rf, \text{sigma})^2)$$

$$\text{gamma} = nd1 / (s * \text{sigma} * \text{Sqr}(T))$$

End Function

Voici une première simulation pour laquelle l'option 1 finit en jeu.

	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI
14		T1	T2	S	gamma1	gamma2	k	N(d1)	N(d2)	h	c2
15	0	0,25	0,5	100	0,039844	0,028139	1,415982	0,51993881	0,528186	-0,2279633	5,637198
16	1	0,230769	0,480769	103,0534	0,03775	0,026795	1,408822	0,6409845	0,612648	-0,2221274	7,270268
17	2	0,211538	0,461538	103,6937	0,037961	0,026771	1,417962	0,67014073	0,631144	-0,2247972	7,558338
18	3	0,192308	0,442308	105,6781	0,034307	0,025272	1,357501	0,74970066	0,684996	-0,1801819	8,754715
19	4	0,173077	0,423077	109,958	0,021672	0,020337	1,065649	0,88149564	0,786624	0,0432306	11,80856
20	5	0,153846	0,403846	108,6249	0,025739	0,022387	1,149737	0,86298722	0,762532	-0,0137247	10,67765
21	6	0,134615	0,384615	108,9499	0,024149	0,022232	1,086202	0,88586417	0,774303	0,04481426	10,82574
22	7	0,115385	0,365385	104,7181	0,043504	0,028583	1,522037	0,76194436	0,670679	-0,258854	7,646751
23	8	0,096154	0,346154	105,7156	0,039587	0,027851	1,421417	0,82310201	0,702359	-0,1752422	8,211329
24	9	0,076923	0,326923	105,0487	0,045018	0,029483	1,526909	0,82008246	0,687187	-0,2291898	7,625531
25	10	0,057692	0,307692	110,1638	0,009429	0,021222	0,444305	0,97927643	0,823295	0,61348241	11,39213
26	11	0,038462	0,288462	106,4903	0,025597	0,028433	0,900234	0,94768721	0,738628	0,28274895	8,403242
27	12	0,019231	0,269231	110,7098	0,000148	0,020381	0,007248	0,99988439	0,849033	0,99373053	11,65313
28	13	0,00001	0,25	111,6494	0	0,018404	0	1	0,875327	1	12,37113

L'évolution correspondante de la valeur de la dette est égale à :

	AL		AN	AO	AP
14	Dette + c1(0)	14	var. c	h1s1-h0s0	k1c1-k0c0
15	-14,8141546	15			
16	0,547898255	16	-1,610199	1,1713048	-2,3996105
17	-0,20814157	17	2,007222	-4,387572	3,4376176
18	4,179352213	18	1,294181	1,1111937	1,7247544
19	21,11060946	19	0,883071	3,0513882	0,890408
20	-5,28002219	20	-0,695599	-4,051438	-0,2977846
21	5,685465756	21	-3,773009	-9,199386	-4,6031967
22	-28,4489044	22	-1,085875	5,1172703	-2,395684
23	8,001270268	23	-0,651448	10,755058	-2,1845609
24	-4,85053758	24	-0,110818	0,0860385	-0,2298561
25	80,50515746	25	-0,1465	5,5473621	-0,7514918
26	-31,3489523	26	-0,096793	12,76552	-1,1187401
27	68,29900567	27	-0,002005	0,8283964	-0,0539844
28	0,609714743	28	-6,6E-07	0,0011948	-6,37E-05
29	103,9877612				

Détaillons les calculs. La cellule *AL15* est égale à la dette à laquelle s'ajoute le prix du call à couvrir, *c1*, que nous devons récupérer à la fin de la simulation si le portefeuille constitué réplique bien ce call. En vertu des équations précédentes, le montant qui se trouve dans la cellule *AL15* est égal à : $(hS + kc_2)$, ce qui en termes de notre chiffrier correspond à :

$$AL15 = (AH15 * AB15) + (AE15 * AI15)$$

Par la suite, la variation de la dette est égale à :

$$\Delta dette = -\Delta c_1 + \Delta(hS) + \Delta(kc_2)$$

Les variations de c_1 sont calculées à partir de la formule de Black et Scholes. A titre d'exemple, à la cellule *AL16*, on retrouve la formule suivante :

$$AL16 = -AN16 + AO16 + AP16$$

et ainsi de suite.

On voit à la cellule *AL29* que la valeur finale de la dette et du call est de 103,98. En retranchant le prix d'exercice, on retrouve bien son prix donné par l'équation de Black et Scholes, soit 3,98 \$. La couverture s'avère donc juste. Un cas pour lequel l'option 1 finit hors-jeu se lit au tableau 9.

Tableau 9 Simulation d'une opération de couverture pour laquelle l'option termine hors-jeu

	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI
14		T1	T2	S	gamma1	gamma2	k	N(d1)	N(d2)	h	c2
15	0	0,25	0,5	100	0,039844	0,028139	1,415982	0,51993881	0,528186	-0,2279633	5,637198
16	1	0,230769	0,480769	100,2358	0,041317	0,028594	1,444955	0,52891777	0,534394	-0,2432573	5,653105
17	2	0,211538	0,461538	96,77165	0,042704	0,029887	1,428837	0,37799348	0,431097	-0,2379731	3,869206
18	3	0,192308	0,442308	105,4835	0,034853	0,025486	1,367525	0,74296909	0,680055	-0,1870238	8,621851
19	4	0,173077	0,423077	106,8206	0,031685	0,024373	1,300007	0,79802483	0,71642	-0,1333264	9,44741
20	5	0,153846	0,403846	100,4453	0,050398	0,031098	1,620602	0,53818471	0,539235	-0,3357006	5,304085
21	6	0,134615	0,384615	100,9735	0,053082	0,031542	1,682863	0,566987	0,555718	-0,3682098	5,471027
22	7	0,115385	0,365385	97,38531	0,056596	0,033461	1,691401	0,36091084	0,436949	-0,3781444	3,563318
23	8	0,096154	0,346154	93,96987	0,042688	0,032311	1,321177	0,16555742	0,319274	-0,2562605	2,155369
24	9	0,076923	0,326923	96,15299	0,059379	0,03483	1,704838	0,24841442	0,387486	-0,4121873	2,808646
25	10	0,057692	0,307692	94,63402	0,046654	0,034468	1,353565	0,1304884	0,329363	-0,3153254	2,142517
26	11	0,038462	0,288462	90,20202	0,003746	0,027307	0,137193	0,00453505	0,182396	-0,0204883	0,915931
27	12	0,019231	0,269231	88,85959	1,98E-05	0,023982	0,000826	1,0942E-05	0,138679	-0,0001035	0,621591
28	13	0,00001	0,25	88,11973	0	0,021648	0	0	0,112233	0	0,460044

L'évolution de la dette et du call est alors la suivante :

	AL
14	Dette + c1(0)
15	-14,8141546
16	-1,36767954
17	0,446876645
18	4,804632842
19	5,091181355
20	-18,6602265
21	-2,93862763
22	-0,9406797
23	10,6353058
24	-13,8811506
25	8,380532123
26	25,50434982
27	1,718707272
28	0,008693941
29	3,987761168

On retrouve alors directement le prix du call donné par l'équation de Black et Scholes, soit 3,98 \$. On en conclut donc qu'une couverture delta-gamma est beaucoup plus précise qu'une couverture delta.

Nous pouvons également mesurer la performance d'une couverture delta et une couverture delta-gamma en couvrant l'option d'achat vendue la première semaine¹⁹ et en examinant la valeur du portefeuille géré passivement après une semaine et après 13 semaines, puisque l'option couverte a ici une échéance de 13 semaines. On imagine alors divers prix de l'action et on examine l'évolution du portefeuille sous ces divers prix. Pour effectuer ces calculs, nous nous servons des deux calls qui se retrouvent au tableau 10. La seule différence entre ces deux calls est l'échéance.

¹⁹ On retrouve cette approche chez : Jackson et Staunton (2001), p. 190-192.

Tableau 10 Données du problème de couverture

	BI	BJ	BK	BL	BM
1	S	100		S	100
2	X	100		X	100
3	T	0.25		T	0.5
4	rf	0.02		rf	0.02
5	sigma	0.2		sigma	0.2
6					
7	Prix call (c1)	4.2321656		Prix du call (c2)	6.120657
8	N(d1)	0.5398279		N(d1)	0.556231
9	d1	0.1		d1	0.141421
10	n(d1)	0.3969525		n(d1)	0.394973
11	gamma	0.0396953		gamma	0.027929

Examinons d'abord une couverture delta gérée passivement après une semaine. Au moment de la couverture, le portefeuille V est de:

$$V = hS - B - c_1$$

Les détails de la couverture passive se retrouvent se lisent au tableau 11.

Tableau 11 Couverture delta passive d'un call de trois mois

	AQ	AR	AS	AT	AU	AV	AW	AX	AY
15	S		T1	T2	c	N(d1)	B	h	V
16	100	0	0.25	0.5	4.232166	0.539828	49.7506239	0.539828	0
17	100	1	0.230769	0.480769	4.057268		49.7697625		0.155759
18	100	2	0.211538	0.461538	3.875664		49.7889084		0.318217
19	100	3	0.192308	0.442308	3.686419		49.8080616		0.488308
20	100	4	0.173077	0.423077	3.488359		49.8272223		0.667209
21	100	5	0.153846	0.403846	3.27997		49.8463903		0.856429
22	100	6	0.134615	0.384615	3.059252		49.8655656		1.057972
23	100	7	0.115385	0.365385	2.823454		49.8847484		1.274587
24	100	8	0.096154	0.346154	2.568618		49.9039385		1.510233
25	100	9	0.076923	0.326923	2.28867		49.923136		1.770983
26	100	10	0.057692	0.307692	1.973386		49.9423409		2.067063
27	100	11	0.038462	0.288462	1.602832		49.9615532		2.418404
28	100	12	0.019231	0.269231	1.125557		49.9807729		2.87646
29	100	13	0.00001	0.25	0.025241		50		3.957548

La première semaine, on annule V en utilisant le delta du call à ce moment-là, soit 0,53. On a alors l'équation suivante:

$$V = (0,53 \times 100) - 49,75 - 4,23 = 0$$

Dans cette équation, 4,23 représente la valeur du call lors de son émission et 49,75 est la dette contractée pour financer la valeur du portefeuille d'actions diminuée de la prime encaissée. Puis on maintient ce portefeuille passif jusqu'à l'échéance du call. La dette s'accumule au rythme des intérêts à payer, soit:

$$B_t = B_{t-1}e^{\frac{r}{52}}$$

les intervalles de calculs étant d'une semaine. Certes, la valeur du call diminue au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'échéance. Comme le prix de l'action demeure à 100 dans cette simulation, la position nette de l'investisseur mesurée par V est de 3,95\$, ce qui correspond grosso modo à la prime touchée par celui-ci au moment de la couverture, l'option ayant dans ce cas terminé hors-jeu. Certes, les intérêts payés par l'investisseur se retranchent à la prime touchée lors de la couverture.

Envisageons maintenant une couverture passive delta-gamma. Le portefeuille V est alors égal à:

$$V = hS - c_1 + kc_2 - B$$

avec $k = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$ et $h = \delta_1 - k\delta_2$. Les détails du calculs de la couverture delta-gamma passive se

lisent au tableau 12.

Tableau 12 Couverture delta-gamma passive d'un call de trois mois

	BJ	BK	BL	BM	BN	BO	BP	BQ	BR	BS	BT	BU	BV	BW
14	S		T1	T2	c1	delta1	c2	delta2	gamma1	gamma2	k	h	B	V
15	100	0	0.25	0.5	4.232166	0.539828	6.120657	0.556231	0.039695	0.027929	1.421302	-0.250745	-20.60738	0
16	100	1	0.230769231	0.480769	4.057268		5.993121						-20.61531	0.001558
17	100	2	0.211538462	0.461538	3.875664		5.863344						-20.62324	0.006639
18	100	3	0.192307692	0.442308	3.686419		5.731183						-20.63117	0.015978
19	100	4	0.173076923	0.423077	3.488359		5.596484						-20.63911	0.030527
20	100	5	0.153846154	0.403846	3.27997		5.459073						-20.64705	0.051553
21	100	6	0.134615385	0.384615	3.059252		5.318755						-20.65499	0.080779
22	100	7	0.115384615	0.365385	2.823454		5.175312						-20.66294	0.120646
23	100	8	0.096153846	0.346154	2.568618		5.028493						-20.67089	0.174758
24	100	9	0.076923077	0.326923	2.28867		4.878017						-20.67884	0.248786
25	100	10	0.057692308	0.307692	1.973386		4.723558						-20.6868	0.352492
26	100	11	0.038461538	0.288462	1.602832		4.564737						-20.69475	0.505271
27	100	12	0.019230769	0.269231	1.125557		4.401114						-20.70271	0.757949
28	100	13	0.00001	0.25	0.025241		4.232166						-20.71068	1.626102

Lors de la couverture initiale, le portefeuille V est égal à:

$$V = (-0,25 \times 100) - 4,32 + (1,42 \times 6,12) - (-20,60) = 0$$

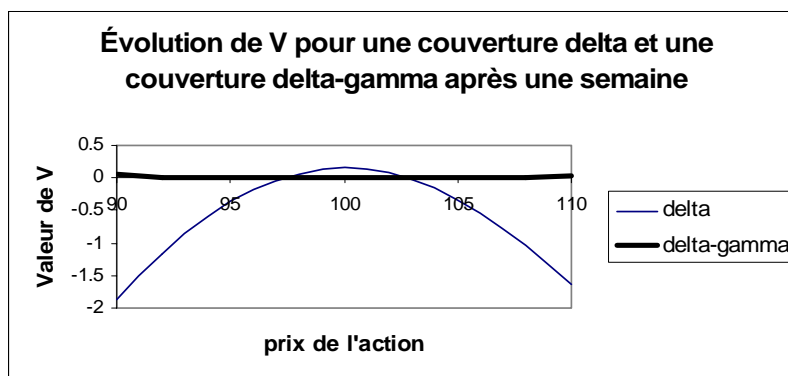
On voit que la couverture delta-gamma du call c_1 est bien différente de la couverture delta.

D'abord, h est négatif, c'est-à-dire qu'on vend à découvert des actions pour couvrir c_1 .

Ensuite, on doit effectuer un prêt plutôt qu'un emprunt pour couvrir ledit call.

À la figure 6, on retrouve le portefeuille V sous une couverture delta et sous une couverture delta-gamma après une semaine, le portefeuille V n'ayant pas été ajusté. On poursuit ici en effet une stratégie passive plutôt qu'une stratégie active ou dynamique. Sur l'axe des abscisses apparaît un intervalle de prix raisonnable pour les variations du prix de l'action après une semaine. Comme on peut le constater, la couverture delta peut donner lieu à des flux monétaires non négligeables si le prix de l'action varie sensiblement d'une semaine à l'autre. Pour sa part, la couverture delta-gamma est beaucoup plus fiable. Les flux monétaires sont quasi-nuls quelle que soit l'évolution du prix de l'action d'une semaine à l'autre.

Figure 6

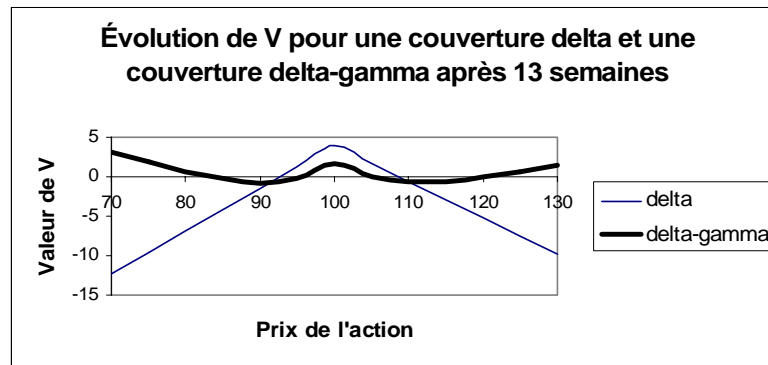


Qu'en est-il du portefeuille V s'il est géré passivement après 13 semaines ? On remarque à la figure 7 que le portefeuille V couvert initialement par la procédure delta peut subir des pertes appréciables si le prix de l'action s'éloigne beaucoup du prix initial, ceci quel que soit le signe de la variation. Par ailleurs, la couverture delta-gamma assure une protection beaucoup plus grande.

L'évolution de V en fonction du prix de l'action s'assimile à la stratégie du papillon. Le second call agit à titre de protection lors d'une variation appréciable du prix de l'action, que

cette variation soit haussière ou baissière. Les ailes de la stratégie se relèvent lorsque la variation du prix de l'action est importante, et elles protègent de la sorte le portefeuille V.

Figure 7



Résumé

Dans cet article, nous avons présenté une formule qui devait révolutionner la finance moderne : celle de Black et Scholes. Cette formule a exercé un tel impact sur les marchés financiers que l'on croit, à tort ou à raison, que les prix du marché des options sont établis en conformité avec la formule de Black et Scholes plutôt qu'en vertu du jeu libre de l'offre et de la demande ! C'est donc dire à quel point la formule de Black et Scholes s'est ancrée très fermement dans les marchés financiers.

Comme nous avons pu le constater, les « grecs », qui sont établis à partir de la formule de Black et Scholes et qui servent à mesurer la sensibilité des prix des options à ses divers paramètres, jouent un très grand rôle dans la couverture d'un portefeuille contre le risque auquel il est exposé. Le delta est particulièrement important pour obtenir un portefeuille delta-neutre, c'est-à-dire qui n'est plus sensible aux variations à court terme du prix de l'action. Mais, pour demeurer delta-neutre, un tel portefeuille doit être soumis à une stratégie dynamique, en ce sens qu'il doit être rajusté constamment car le delta de l'option est en constante évolution. Une telle stratégie peut donner lieu à des frais de transaction onéreux au point de ne plus être applicable. Pour pallier à ce problème, on peut intégrer le gamma lors

du calcul de la couverture, ce grec représentant la convexité du prix de l'option. On aura alors un portefeuille delta-gamma neutre. Mais cette couverture exige que l'on introduise une autre option dans le portefeuille de manière à ramener la position gamma du portefeuille à zéro.

Finalement, nous avons constaté que la généralisation de la formule de Black et Scholes permettait de valoriser une grande variété d'options européennes, autres que les *plain-vanilla*. Cette formule permet en effet de calculer les prix des catégories suivantes d'options européennes : options écrites sur une action qui verse un dividende, options sur devises, options sur contrats à terme et options sur obligations, qui n'est qu'une simple transposition de la formule des options sur contrats à terme. La formule de Black et Scholes fait donc montre d'une grande flexibilité mais elle présente également des défauts. D'abord, elle suppose que la volatilité du rendement de l'action est constante, ce qui donne lieu à une sous-évaluation des actions qui sont sensiblement en-dehors de la monnaie. On désigne ce phénomène sous le vocable «smile» bien que le smile concerne davantage les options écrites sur des devises plutôt que sur des actions. Ensuite, la formule de Black et Scholes suppose que la distribution des rendements de l'action est gaussienne, ce qui ne semble pas se vérifier pour les rendements journaliers et intra-journaliers, c'est-à-dire les rendements mesurés à haute fréquence. Incidemment, les deux déficiences du modèle de Black et Scholes que nous venons de signaler sont en interaction. Le «smile» que l'on remarque du côté des options sur devises serait en effet causé par une distribution leptokurtique des rendements des prix des devises.

Bibliographie

Black, F. et Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-659.

De la Granville, Olivier (2001), Bond Pricing and Portfolio Analysis, The MIT Press.

Dubois, M. et Girerd-Potin (2001), Exercices de théorie financière et de gestion de portefeuille, De Boeck Université.

Garman, M.B. et Kohlhagen, S.W. (1983), Foreign currencies option values, *Journal of International Money and Finance*, 2, p. 231-237.

Gemmil, G. (1993), Options Pricing : an International Perspective, McGraw Hill.

Haug, E.G. (1998), The complete guide to option pricing formulas, McGraw Hill.

Hull, J.C. (2006), Options, Futures and other Derivatives, 6th edition, Prentice Hall.

Jackson, M. et Staunton, M. (2001), Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA, John Wiley & Sons.

McDonald, R.L. (2006), Derivatives Markets, 2^e ed., Addison Wesley.

Racicot, F.-É. et Théoret, R. (2004), Le calcul numérique en finance empirique et quantitative, Presses de l'Université du Québec (PUQ).

Racicot, F.-É. et Théoret, R. (2001), Traité d'économétrie financière, Presses de l'Université du Québec (PUQ).

Rebonato, R. (2004), Volatility and Correlation, 2^{ième} edition, John Wiley & Sons.