# L'assurance de portefeuille

## Simulations en Visual Basic de portefeuilles visant à reproduire les flux monétaires de stratégies d'options

François-Éric Racicot*

Département des sciences administratives
Université du Québec, Outaouais

Raymond Théoret

Département Stratégie des Affaires
Université du Québec, Montréal

**RePad Working Paper No. 0332005**

* Adresse postale : François-Éric Racicot, Département des sciences administratives, Université du Québec en Outaouais, Pavillon Lucien Brault, 101 rue Saint Jean Bosco, Gatineau, Québec, Canada, J8Y 3J5.
Correspondance : francoiseric.racicot@uqo.ca.
Raymond Théoret, Département stratégie des affaires, Université du Québec à Montréal, 315 est, Ste-Catherine, Montréal, H2X-3X2. Correspondance : theoret.raymond@uqam.ca.
Ce papier est l'un des chapitres de notre prochain ouvrage intitulé *: Finance computationnelle et gestion des risques*.

### *Résumé*

*Dans cet article, nous envisageons la simulation de portefeuilles qui visent à protéger en tout ou en partie le capital investi, ce qui est l'essence même de l'assurance de portefeuille. La plupart des simulations visent à reproduire les flux monétaires de stratégies basées sur des options. Nous montrons d'abord comment reproduire les flux monétaires d'une option d'achat en faisant appel à un portefeuille composé d'actions et d'un emprunt. Puis nous simulons un portefeuille qui vise à reproduire les flux monétaires d'un protective put, qui impose une valeur minimale au portefeuille reliée au prix d'exercice du put retenu. Finalement, nous simulons la technique du coussin de Black et analysons la sensibilité du portefeuille assuré à divers paramètres, tel le degré d'aversion au risque des investisseurs. Nous considérons les limites de chacune des stratégies étudiées.*



### *Abstract*

*In this paper, we simulate portfolios which aim to insure the invested capital. The object of our simulations is the duplication of the cash-flows of strategies based on options. We initially show how to duplicate the cash-flows of a call by using a leveraged portfolio of stocks. After, we simulate another portfolio which aims to replicate a protective put. Finally, we simulate the cushion technique of Black and analyse the sensitivity of the insured portfolio to some parameters like the degree of risk aversion of the investor. We consider the limits of each of the studied strategies.*



*Mots-clefs : ingénierie financière; assurance de portefeuille; simulation de Monte Carlo*

*Keywords : financial engineering; portfolio insurance; Monte Carlo simulation.*

*JEL : G12; G13; G33.*

L'assurance de portefeuille est un terme générique utilisé pour décrire les stratégies qui visent à protéger le capital d'un investisseur. Nous avons déjà frayé avec les techniques d'assurance de portefeuille. Nous savons qu'un put constitue une assurance pour une position en compte («long») dans un portefeuille d'actions alors qu'un call constitue une assurance pour une position à découvert («short») dans un portefeuille. Nous avons également étudié auparavant la technique de couverture par le delta, qui constitue une forme de police d'assurance.

Nous ouvrons cet article en montrant que l'assurance d'un portefeuille peut être obtenue soit en détenant des options ou des contrats à terme ou soit par des opérations dites de couverture dynamique qui visent à reproduire les contrats que sont les options ou les contrats à terme. Nous nous concentrerons plus spécifiquement sur l'assurance de portefeuille à l'aide d'options. Il faut comprendre ici que tout portefeuille a une position delta. On pourra reproduire un portefeuille composé d'options et d'actions en utilisant un portefeuille composé d'actions et de numéraire qui a la même position delta que ledit portefeuille comprenant des options. Il faudra par conséquent ajuster continuellement la composition du portefeuille dupliquant pour qu'il offre la même protection que le portefeuille d'options.

Puis nous nous concentrerons sur la couverture d'un portefeuille en utilisant la formule de Black et Scholes pour reproduire, à l'aide d'un portefeuille constitué d'actions et de numéraire, un portefeuille d'actions qui est protégé par des options. Finalement, nous exposerons une méthode qui ne fait pas appel aux options pour assurer un portefeuille : la méthode CPPI de Black et Jones (1988).

## 1. Construction d'un portefeuille dupliquant[1].

Supposons qu'un investisseur veuille reproduire un portefeuille comportant 1000 actions et 1000 puts[2]. Les données ayant trait à chaque put sont les suivantes : S (prix de l'action) : 45$; X (prix d'exercice) : 45$; T (durée du put) : 0,25 an; $r_f$ (taux sans risque) : 2%; $\sigma$ (volatilité) : 25%. Chaque put ayant un prix d'exercice de 45$, notre investisseur est assuré d'un prix de revente pour chaque action au moins égal à 45$. Si le prix de l'action tombe en deçà de 45$, il exercera ses puts qui lui permettront d'écouler chacune de ses actions à 45$. Si le prix de l'action se situe au-dessus de 45$ à l'échéance des puts, ceux-ci seront alors sans valeur.

Le prix de ce put est de 2,1266 $ en vertu de la formule de B&S. Pour calculer son delta, on recourt à la parité put-call, c'est-à-dire :

$$P = C - S + Xe^{-r_f T}$$

Pour calculer le delta du put, on dérive *P* par rapport à *S*. On obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} - \frac{\partial S}{\partial S} + \frac{\partial \left( Xe^{-r_f T} \right)}{\partial S}$$

$$\Delta_{put} = \Delta_{call} - 1$$

Le delta du put $\Delta_{put}$ est donc égal au delta du call moins 1. Comme le delta d'un call ne saurait excéder 1, le delta d'un put est négatif, c'est-à-dire qu'un put se déprécie quand le prix de l'action sous-jacente augmente. Pour les données de notre problème, le delta du call est de 0,541. Le delta du put correspondant est donc de : -0,459.

La position delta de ce portefeuille se définit comme suit :

[1] Sur ce sujet, on consultera : Clarke, R.G. (1992) et Brown, K.C. (1994)
[2] En fait, un put s'applique à 100 actions mais nous allouons un put par action par souci de simplification.

*position delta = (delta action x nombre d'actions) + (delta put x nombre de puts)*

Pour le cas qui nous intéresse, la position delta du portefeuille composé de 1000 actions et de 1000 options est de :

$$(1000 \text{ x } 1) + (1000 \text{ x } -0{,}459) = 541$$

puisque le delta d'une action, égal à $\frac{\partial S}{\partial S}$, est bien sûr égal à 1. Ce portefeuille a donc une exposition au prix de l'action qui est égale à 541. La couverture a pour effet de neutraliser 459 actions.

Un investisseur détient un portefeuille de 1000 actions et désire la même protection qu'un portefeuille composé de 1000 actions et de 1000 puts. Pour ce faire, il doit vendre à découvert 459 actions et détenir le produit de la vente en numéraire. Comme on le verra plus spécifiquement dans la section suivante, un put équivaut à une vente à découvert d'actions accompagnée d'un prêt. Les valeurs en cause seront alors spécifiées.

Le prix de l'action baisse par la suite à 35$. Logiquement, le portefeuille qui ne comporte que des actions et du numéraire a besoin de plus de protection. Les ventes à découvert doivent augmenter davantage. Pour en juger, calculons la position delta du portefeuille composé de 1000 actions et de 1000 puts. À 35$, le delta du put est de -0,972. La position delta de ce portefeuille est donc de : 28. La position delta du portefeuille qui n'est composé que d'actions et de numéraire doit être ramenée à 28. Pour ce faire, l'investisseur doit vendre à découvert un montant additionnel d'actions égal à 513, ce qui portera le nombre total d'actions vendues à découvert à 972 actions. La position delta du portefeuille composé d'actions et de numéraire sera alors réduite à 28. Comme le prix de l'action a diminué, le portefeuille comprend moins d'actions et davantage de numéraire comme il se doit dans un marché baissier pour un portefeuille que l'on veut protéger.

Plutôt que de diminuer à 35$, le prix de l'action augmente à 55$. Le portefeuille composé d'actions et de numéraire a alors besoin de moins de protection pour équivaloir à un portefeuille composé de 1000 actions et 1000 puts. A 55$, le put est très hors-jeu puisque son delta est égal à -0,044. La position delta du portefeuille composé de 1000 actions et 1000 puts est alors de 956. Le nombre de ventes à découvert du portefeuille composé d'actions et de numéraire doit être réduit. Ce portefeuille ne doit comporter maintenant que 44 ventes à découvert. Au prix de l'action de 45$, le nombre de ventes à découvert se situait à 459. Un montant de 415 actions doivent donc être rachetées pour maintenir l'équivalence.

Pour dégager le principe général de l'assurance de portefeuille, supposons que l'on veuille reproduire un portefeuille composé d'une action et d'un put, c'est-à-dire :

$$\Pi = S + P$$

Il est facile d'établir que le delta de ce portefeuille est égal à $\Delta C$ . Le coefficient delta mesure le risque de ce portefeuille. Un portefeuille composé d'actions et de numéraire qui reproduit $\Pi$ doit avoir le même delta. Ce portefeuille, désigné par R, est égal à :

$$R = mS + numéraire$$

avec $m \leq 1$. Comme R = S, la valeur du numéraire est de :

$$numéraire = (1 - m)S$$

Le delta du portefeuille R, soit $\frac{\partial R}{\partial S}$, est égal à m. Pour que le portefeuille R réplique le portefeuille $\Pi$ , il faut donc qu'en tout temps :

$$\Delta_R = \Delta_\Pi = \Delta C$$

Soit un put aux caractéristiques suivantes : S = 100, X = 80, $r_f$ = 2%, T = 1 an; $\sigma = 25\%$. On veut reproduire un portefeuille qui comprend une action et un put. Le tableau 1 donne la proportion d'actions que doit comporter le portefeuille dupliquant en fonction du prix de l'action.

***Tableau 1*** *Évolution de m en fonction de S : protective put*

| S | m |
|---|---|
| 100 | 0.87 |
| 90 | 0.75 |
| 80 | 0.58 |
| 70 | 0.37 |
| 60 | 0.17 |

La stratégie que nous venons d'analyser est celle du *protective put*. Comme on le constate au tableau 1, le portefeuille R qui veut reproduire cette stratégie doit comporter de moins en moins d'actions à mesure que le prix de l'action baisse. Cela apparaît bien raisonnable car l'on doit évidemment détenir moins d'actions et plus de numéraire dans un marché baissier. Dans le jargon du CAPM, on dirait qu'il faut abaisser le bêta de son portefeuille en détenant une proportion moins élevée d'actions et une proportion plus importante de liquidités.

Nous voulons maintenant analyser une autre stratégie fort connue, celle du *covered call*. Le portefeuille $\Pi$ est maintenant égal à :

$$\Pi = S - C$$

Par exemple, supposons qu'un investisseur ait vendu des calls. Il encaisse la prime mais il s'expose à un risque d'exercice. En effet, si, à l'échéance du call, le prix de l'action sous-jacente est plus élevé que le prix d'exercice, le call sera exercé et la perte de l'investisseur peut alors être illimitée. Pour se prémunir contre cette perte, l'investisseur se porte acquéreur du sous-jacent. D'où la justification de la stratégie dite «covered call».

On veut répliquer cette stratégie par un portefeuille R composé d'actions et de numéraire. La condition suivante doit donc être réalisée :

$$\Delta_R = \Delta_\Pi = 1 - \Delta_c$$

Le tableau 2 donne la proportion d’actions que doit comporter le portefeuille dupliquant en fonction du prix de l’action pour un call ayant les mêmes spécifications que le put précédent.

***Tableau 2*** *Évolution de m en fonction de S : covered call*

| S | m |
|---|---|
| 100 | 0.13 |
| 90 | 0.25 |
| 80 | 0.42 |
| 70 | 0.63 |
| 60 | 0.83 |

Comme on le constate au tableau 2, cette stratégie est l’inverse de celle du *protective put*. Si le prix de l’action est supérieur au prix d’exercice, ici 80, le call est en-jeu. Le delta du *covered call* , qui est égal à $(1-\Delta c)$, est alors faible puisque $\Delta c$ est alors élevé. Autrement dit, le potentiel de hausse de ce portefeuille est limité par la probabilité importante d’exercice du call. Le portefeuille réplique R, qui doit avoir le même delta que le *covered call*, comporte alors une proportion faible d’actions et une proportion élevée de numéraire. Par ailleurs, si le prix de l’action est inférieur au prix d’exercice, la volatilité du *covered call* n’est plus limitée par la probabilité d’exercice du call, qui est alors faible. Le delta de la stratégie *covered call* est alors important. Il s’ensuit que la proportion d’actions dans le portefeuille dupliquant R doit alors être élevée, ce qu’indique le tableau 2. Car qui dit delta important dit proportion élevée d’actions, le delta mesurant la sensibilité d’un portefeuille au cours de l’action.

## 2. Simulation d’un portefeuille assuré

Nous avons pu constater dans la section précédente qu’un portefeuille de puts pouvait être reproduit par une position à découvert dans des actions accompagnée d’un prêt, que l'on peut également représenter par la détention d'une obligation à coupon zéro. Pour mieux s'en convaincre, réécrivons la formule de B&S pour un put :

$$P = -SN(-d_1) + Xe^{-rT}N(-d_2)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

En vertu de cette formule, un put équivaut à détenir une position à découvert à hauteur de N(-$d_1$) dans une action accompagnée d'un placement égal à $Xe^{-rT}N(-d_2)$ dans une obligation à coupon 0.

Dans la section précédente, nous avons vu comment on pouvait reproduire un portefeuille composé d'une action et d'un put par un autre composé strictement d'actions et de numéraire. Dans cette section, nous voulons simuler ce dernier portefeuille et montrer qu'il apporte effectivement la même protection que celui qui est composé d'une action et d'un put.

L'investissement total dans un *protective put* est le suivant [3]:

$$\Pi = S + P$$

En remplaçant P par sa valeur donnée par l'équation de Black et Scholes, nous obtenons :

$$\Pi = S - SN(-d_1) + Xe^{-rT}N(-d_2) = S[1 - N(-d_1)] + Xe^{-rT}N(-d_2)$$

Puisque $N(-d_1) = 1 - N(d_1)$, il suit que :

$$\Pi = SN(d_1) + Xe^{-rT}N(-d_2)$$

La proportion du portefeuille investie dans les actions, représentée par $\omega$ est donc de :

[3] Nous adoptons ici l'approche de Benninga (2000), chapitre 17.

$$\omega = \frac{SN(d_1)}{S+P} \qquad (1)$$

Le reliquat $(1-\omega)$ est investi dans des obligations à coupon zéro, c'est-à-dire :

$$1-\omega = \frac{Xe^{-rT}N(-d_2)}{S+P} \qquad (2)$$

Nous voulons reproduire la couverture que procure un *protective put* à l'aide d'un portefeuille composé d'actions et d'obligations à coupons 0 (bons). Pour ce faire, nous devons en tout temps détenir des actions et des bons dans les proportions données par les équations (1) et (2). Il s'agit ici d'une couverture dynamique[4] puisque le prix de l'action et le temps sont des variables qui modifient constamment lesdites proportions. Notons également que le portefeuille dupliquant doit s'autofinancer en ce sens qu'il doit n'y avoir ni ajout ni retrait d'argent frais du portefeuille. Les réajustements sont effectués à partir des montants disponibles dans le portefeuille.

Soit l'exemple suivant. Les coordonnées d'un put se lisent comme suit : S (prix de l'action sous-jacente) : 50$; X (prix d'exercice) : 50$; T (durée) : 1 an ; r (taux sans risque) : 8%; $\sigma$ (volatilité de l'action) : 25%. Ce put vaut 3,10$ en vertu de la formule de B&S. Si un investisseur détient un de ces puts par action, il s'assure que le prix de chaque action ne tombera pas en deçà de 50$. Mais disons que de tels puts sur les actions que détient un investisseur n'existent pas. L'investisseur devra donc obtenir la même protection par couverture dynamique, c'est-à-dire qu'il devra répliquer, à l'aide d'actions et de bons, la protection que lui assurerait un portefeuille composé d'actions et de puts en nombres égaux.

Notre investisseur dispose de 1000$. Si les puts existaient, il répartirait son portefeuille en n actions et en n puts de manière à ce que le prix de ses actions ne diminue pas en deçà de 50$. Il répartirait donc de la façon suivante son portefeuille :

[4] *dynamic hedging*, en anglais.

$$1000\$ = (n \times S) + (n \times P) = (n \times 50) + (n \times 3{,}10)$$

On trouve que n est égal à 18,8 actions, soit environ 940$. En dupliquant le portefeuille composé de 18,8 actions et de 18,8 puts, l'investisseur veut donc s'assurer que la valeur de son portefeuille ne diminuera pas en dessous de la barre des 940$, ce qui équivaut à un plancher de 50$ pour chacune des actions. Le coût de l'assurance est donc d'environ 60$, ce qui représente la prime totale sur les 18,8 puts[5].

Comment l'investisseur peut-il dupliquer le portefeuille composé de 18,8 actions et de 18,8 puts? Les équations (1) et (2) nous indiquent les proportions dans lesquelles doivent être détenues, en tout temps, les actions et les obligations à coupon 0. Comme l'horizon d'investissement est ici d'un an, nous divisons cette période en 52 semaines pour effectuer la simulation. Nous la subdiviserons par la suite davantage puisque, pour fonctionner véritablement, cette méthode doit être effectuée en continu, ce qui est évidemment impossible dans la pratique ne serait-ce qu'en raison des frais de transaction.

Disons que nous soyons au début de la première semaine. L'investisseur dispose de 1000$. Le prix de l'action est alors de 50$. Sous les données du problème qui viennent d'être fournies, il calcule le prix du put et la proportion d'actions à maintenir à partir de l'équation (1). La valeur initiale des actions dans le portefeuille est alors de :

$$nS = \omega \times 1000\$$$

et la valeur des bons, de :

$$bons = (1 - \omega) \times 1000\$$$

A la fin de la première semaine, on observe un nouveau prix de l'action, qui est obtenu par la formule suivante dans l'algorithme de simulation que nous présenterons ultérieurement;

$$S_t = S_{t-1} + (\mu \times S \times dt) + \left(\sigma \times S \times \varepsilon \times \sqrt{dt}\right)$$

[5] C'est-à-dire : $18{,}8 \times 3{,}10 \approx 60\$$.

avec $\varepsilon \sim N(0,1)$. On postule donc que le prix de l'action obtempère à un mouvement brownien géométrique. Il est à signaler que ce n'est pas le taux sans risque qui détermine le rendement de l'action dans la simulation. En effet, nous nous situons dans l'univers réel et non dans l'univers risque-neutre pour effectuer notre simulation. Nous devons donc introduire le rendement espéré de l'action dans la simulation, que nous représentons par $\mu$ et que nous supposons égal à 15% dans notre simulation.

Le calcul d'un nouveau prix pour l'action vient modifier du ratio $\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right)$ la valeur initiale du portefeuille d'actions. De même, le portefeuille d'obligations se voit bonifié d'une semaine d'intérêts. Sa valeur initiale s'en voit donc multipliée par le nombre suivant : $e^{\frac{r}{52}}$. Le portefeuille prend donc une nouvelle valeur, soit la somme des deux composantes ainsi modifiées.

Au début de la semaine 2, il faut recalculer la valeur du put et $\omega$ à partir des nouvelles données de la simulation. En effet, le prix de l'action est maintenant modifié et une semaine est passée, c'est-à-dire que le put comporte une semaine de moins. On refait donc les mêmes calculs que ceux du début de la semaine 1 avec les nouvelles donnes du problème. A la fin de la semaine 2, on calcule un autre prix de l'action et l'on procède exactement comme à la fin de la semaine 1. Et l'on répète tous ces calculs jusqu'à la fin de la période de simulation, qui est ici fixée à une année. Au tableau 3, on retrouve un programme écrit en Visual Basic qui fournit la simulation du portefeuille dupliquant[6].

[6] Nous avons écrit ce programme à partir d'un chiffrier apparaissant au chapitre 17 de Benninga (2000).

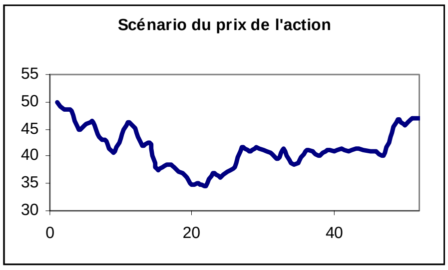
***Tableau 3** Simulation d’une couverture dynamique*

```
Sub assurance1()

S = 50
X = 50
T = 1
r = 0.08
mu = 0.15
sigma = 0.25
port0 = 1000
pas = 52
dt = T / pas


'Semaine 0

done = (Log(S / X) + (r + 0.5 * sigma ^ 2) * T) / sigma * Sqr(T)
Range("done").Offset(0, 0) = done

Ndone = Application.WorksheetFunction.NormSDist(done)
Nminusdone = Application.WorksheetFunction.NormSDist(-done)

dtwo = done - sigma * Sqr(T)
Ndtwo = Application.NormSDist(dtwo)
Nminusdtwo = Application.NormSDist(-dtwo)

put0 = (-S * Nminusdone) + (X * Exp(-r * T) * Nminusdtwo)

wact = (S * Ndone) / (S + put0)

wbons = 1 - wact

act = wact * port0
bons = port0 - act

Range("act").Offset(0, 0) = act
Range("bons").Offset(0, 0) = bons
Range("port").Offset(0, 0) = port0


'Semaines 1 à 51

'   Valeur du portefeuille à la fin de la semaine 0

    For i = 1 To pas - 1


    bons = bons * Exp(r / pas)
    Range("bons1").Offset(i, 0) = bons
    Stminus1 = S
    Range("stminus1").Offset(i, 0) = Stminus1

    eps = Application.NormSInv(Rnd)
    'eps = Range("eps1").Offset(i, 0)

    Range("eps").Offset(i + 1, 0) = eps


    S = S + (mu * S * dt) + (sigma * S * eps * Sqr(dt))

    ‘Autre façon de simuler le prix d’une action
    's = s * Exp(mu * dt + sigma * eps * Sqr(dt))

        Range("pactions").Offset(i, 0) = S

        mult = S / Stminus1
        Range("mult").Offset(i, 0) = mult


        act = act * mult
        Range("act1").Offset(i, 0) = act


        port = act + bons

        Range("port1").Offset(i, 0) = port


    '   Début de la semaine 1

        dur = i * dt
        Tstar = T - dur
        num = Log(S / X) + ((r + 0.5 * sigma ^ 2) * (Tstar))

        done = num / (sigma * Sqr(Tstar))
        Ndone = Application.WorksheetFunction.NormSDist(done)
        Range("Ndone").Offset(i, 0) = Ndone
        Nminusdone = Application.WorksheetFunction.NormSDist(-done)

        Range("done").Offset(i, 0) = done

        dtwo = done - sigma * Sqr(T - i * dt)
        Ndtwo = Application.NormSDist(dtwo)
        Nminusdtwo = Application.NormSDist(-dtwo)

        puts = (-S * Nminusdone) + (X * Exp(-r * (T - i * dt)) * Nminusdtwo)

        wact = (S * Ndone) / (S + puts)

        wbons = 1 - wact

        act = wact * port
        bons = wbons * port

        Range("act").Offset(i, 0) = act
        Range("bons").Offset(i, 0) = bons
        Range("port").Offset(i, 0) = port


        ' On est à la fin de la semaine 1

        Next i

        ‘Semaine 52

        For i = pas To pas

          bons = bons * Exp(r / pas)
        Range("bons1").Offset(i, 0) = bons
        Stminus1 = S
        Range("stminus1").Offset(i, 0) = Stminus1

        'eps = Application.NormSInv(Rnd)
        eps = Range("eps1").Offset(i, 0)
```

```
    Range("eps").Offset(i + 1, 0) = eps

    'S = S + (mu * S * dt) + (sigma * S * eps *
Sqr(dt))

    S = S * Exp(mu * dt + sigma * eps *
Sqr(dt))

    Range("pactions").Offset(i, 0) = S

    mult = S / Stminus1
    Range("mult").Offset(i, 0) = mult

    act = act * mult
    Range("act1").Offset(i, 0) = act

    port = act + bons

    Range("port1").Offset(i, 0) = port

Next i

End Sub
```

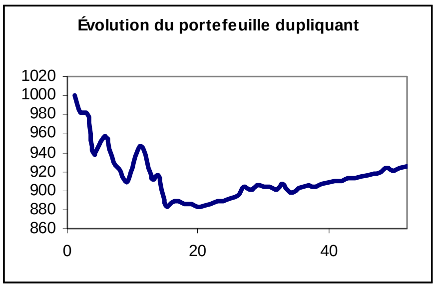
Nous avons dit auparavant que l'investisseur espérait imposer un plancher de 940$ à la valeur de son portefeuille, fixée initialement à 1000$, en dupliquant la stratégie du *protective put*. Or, il n'en sera pas nécessairement ainsi si, comme dans la simulation précédente, le pas est d'une semaine, ce qui constitue un intervalle de réajustement encore trop grand pour avoir les résultats souhaités. Examinons l'un des scénarios obtenus, soit celui d'une évolution défavorable du prix de l'action comme celui qui apparaît à la figure 1.

***Figure 1***



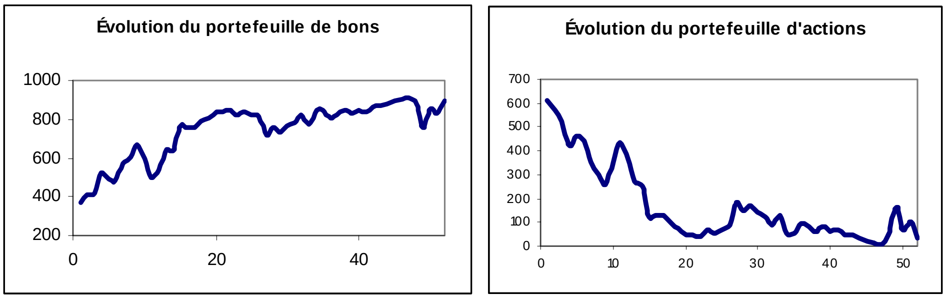

A la figure 1, on remarque que le prix de l'action a baissé durant les 20 premières semaines de la simulation pour remonter vers son niveau de départ par la suite. Dans le même temps, le portefeuille dupliquant a suivi une trajectoire assez rapprochée mais il se situait en deçà de 940$ à la fin de la simulation, montant qui constituait pourtant le plancher de la couverture. Le pas de la simulation était donc encore trop important pour obtenir la couverture voulue. En fait, la valeur du portefeuille s'était affaissée à 926$ à la fin de la simulation comme cela ressort de la figure 2.

***Figure 2***



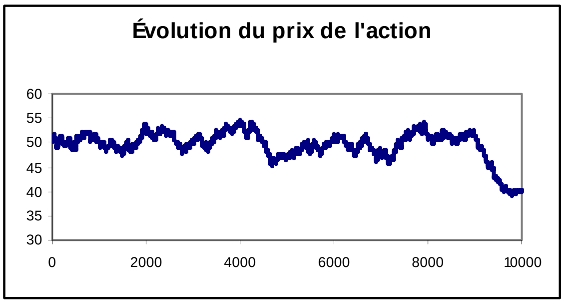

Une autre façon de juger de la performance de la simulation est la suivante. En vertu de la procédure de cette simulation, le portefeuille ne devrait comporter que des actions ou des bons à la fin de la simulation. En vertu de la formule (1), si S > X à la fin de la simulation, $\omega$ devrait être égal à 1 puisque dans pareil cas $N(d_1) \to 1$. Le portefeuille comporte alors 100% d'actions. Et si $S \leq X$ à la fin de la simulation, $\omega$ devrait alors être égal à 0 puisque dans ce cas $N(d_1) \to 0$. Le portefeuille comporte alors 100% de bons. Dans notre problème, S < X à la fin de la simulation. Par conséquent, si le pas est suffisamment petit, le portefeuille ne devrait être composé que de bons à la fin de la simulation. Mais la figure 3 indique qu'il contient encore des actions, ce qui indique qu'un pas d'une semaine est encore trop grand.

***Figure 3***



Nous avons donc refait le même exercice mais en divisant l'année en 10000 sous-intervalles plutôt qu'en semaines, ce qui a pour effet d'augmenter de beaucoup le nombre de rajustements du portefeuille. Le scénario du prix de l'action retenu apparaît à la figure 4, soit encore une fois un scénario baissier.

***Figure 4***




Aux figures 5 et 6, on retrouve les évolutions correspondantes du portefeuille dupliquant et de ses composantes.

***Figure 5*** *Évolution du portefeuille dupliquant*

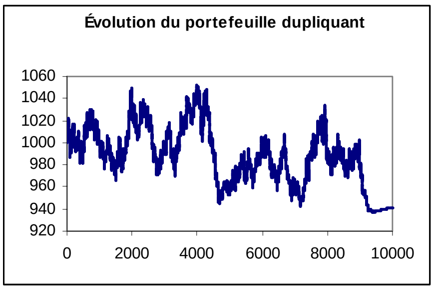
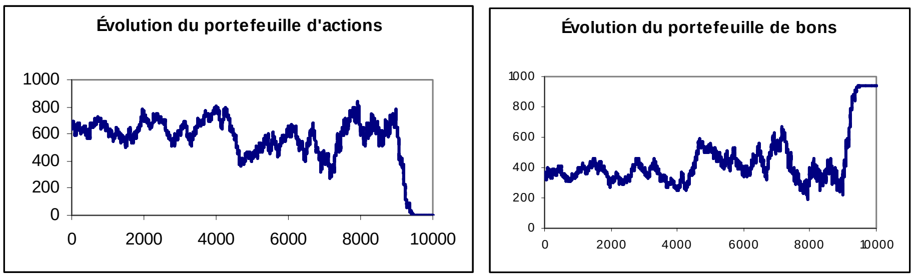


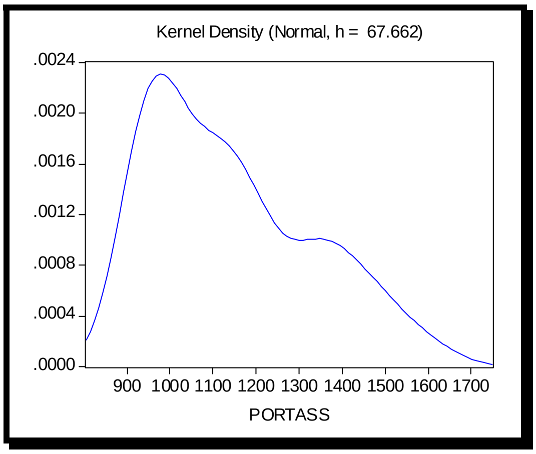

***Figure 6*** *Évolution des composantes du portefeuille dupliquant*



A la figure 5, on constate que la valeur du portefeuille ne tombe pas en deçà du plancher en dépit du fait que le prix de l'action se situe sensiblement sous le prix d'exercice à la fin de la simulation. A la fin du scénario, il frôle les 940$, ce qui constitue le plancher recherché. On voit également à la figure 6 que le portefeuille ne comporte que des obligations à la fin de la simulation, ce qui est le cas lorsque le prix de l'action se situe sous le prix d'exercice à la fin de la simulation. La convergence de la simulation vers les valeurs limites s'est donc bien opérée.

Nous avons effectué 100 simulations du portefeuille dupliquant en fixant le pas à une semaine. La distribution des résultats, calculée à partir d’un kernel gaussien, se retrouve à la figure 7. Comme on peut le constater sur cette figure, le résultat le plus fréquent est celui qui correspond au plancher de 940$ recherché par notre gestionnaire, ce qui démontre qu’il n’y  a pas de repas gratuit. La distribution fait montre également d’une asymétrie positive.

***Figure 7*** *Distribution de 100 simulations du portefeuille dupliquant*




De façon à ce que le lecteur puisse bien maîtriser le principe de la duplication d'options par un portefeuille constitué uniquement d'actions et de bons, nous envisageons maintenant la duplication d'un call. Selon la formule de Black et Scholes, un call est égal à l'expression suivante:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

Par conséquent, un call équivaut à un portefeuille de $N(d_1)$ actions financé par un emprunt égal à $Xe^{-rT}N(d_2)$. Pour dupliquer un call, on suivra donc la même procédure que dans le cas précédent. On devra détenir en tout temps dans le portefeuille dupliquant $N(d_1)$ actions. Au départ, la valeur des bons (emprunt) sera égale à [SN(d1) – call], où call désigne la valeur du call telle que donnée par l'équation de Black et Scholes. Cet emprunt constitue le levier du placement. Par la suite, la position nette ou l'équité[7] du portefeuille évoluera car le prix de l'action se modifie et que de plus l'intérêt doit être payé sur l'emprunt.

Examinons donc le scénario suivant. Un faiseur de marchés a vendu un call et il veut s'assurer d'être en mesure d'honorer son *payoff* [8] à l'échéance si celui-ci est positif. Il constitue donc un portefeuille composé d'actions et d'emprunts, tel que le stipule la formule de Black et Scholes.

A la semaine 0, il constitue un portefeuille formé de $SN(d_1)$ actions et contracte un emprunt égal à: $[S_0N(d_1) - C]$, où C désigne le prix du call tel qu'obtenu par la formule de B&S et $S_0$ , le prix initial de l'action.

A la semaine 1, le prix de l'action s'est modifié de $S_0$ à $S_1$. A la suite de ce changement, la valeur du portefeuille d'actions est égale à: $act_1 = \frac{S_1}{S_0} act_0$, avec $act_0$ la valeur du portefeuille d'actions au temps 0. L'emprunt s'est également gonflé du montant

[7] La position nette est la différence entre la valeur du portefeuille d'actions et la valeur des bons (emprunt).
[8] Le payoff d'un call est égal à $(S\text{-}X)^+$ à son échéance.

des intérêts et est égal à : $bons_1 = bons_0 e^{\frac{r}{52}}$. La position nette du portefeuille est alors égale à : $rep_1 = act_1 - bons_1$. On réajuste alors la valeur du portefeuille de telle sorte que : $act_1' = N(d_1)S_1$. La valeur de l'emprunt est alors égale à : $bons_1' = act_1' - rep_1$. Et on procède de la sorte jusqu'à la 52ième semaine.

A la 52ième semaine, on devrait observer, si le portefeuille composé d'actions et d'emprunts a bien dupliqué le call : $rep_{52} = (S_{52} - X)^+$. Si le call est en jeu, le faiseur de marché peut alors honorer l'exercice du call puisque le portefeuille dupliquant lui procure un cash-flow égal au payoff du call.

Au tableau 4, on retrouve un programme écrit en Visual Basic dont l'objectif est de simuler un portefeuille composé d'actions et d'un emprunt qui duplique un call. Les caractéristiques de ce call sont les suivantes : S = 100; X = 100; T = 1; r = 0,07 et $\sigma$ = 0,15. Le tableau 5 révèle l'une de ces simulations. A la fin de la simulation, c'est-à-dire à la semaine 52, le prix de l'action est de 113,92 $. Le payoff du call est donc de 13,92 $. Or, la valeur nette du portefeuille dupliquant, à hauteur de 13,96 $, est pratiquement identique au payoff. Certes, si le pas de la simulation eût été plus petit, les deux résultats eussent été davantage rapprochés.

---

***Tableau 4*** *Programme Visual Basic de la simulation d'un portefeuille dupliquant un call*

```
Sub assurance1()


S = 100
X = 100
T = 1
r = 0.07
sigma = 0.15

pas = 52
dt = T / pas


'Semaine 0

Range("pactions").Offset(0, 0) = S
```

```
    done = (Log(S / X) + (r + 0.5 * sigma ^ 2) * T) / sigma * Sqr(T)
    Range("done").Offset(0, 0) = done

    Ndone = Application.WorksheetFunction.NormSDist(done)
    Range("Ndone").Offset(0, 0) = Ndone


    dtwo = done - sigma * Sqr(T)
    Ndtwo = Application.NormSDist(dtwo)

    call1 = (S * Ndone) - (X * Exp(-r * T) * Ndtwo)
    Range("call1") = call1
```

```
act = Ndone * S
bons = act - call1

Range("act").Offset(0, 0) = act
Range("bons").Offset(0, 0) = bons
rep = act - bons
Range("rep").Offset(0, 0) = rep


'Semaine 1

'   Valeur du portefeuille à la fin de la semaine 0

    For i = 1 To pas - 1


    bons = bons * Exp(r / pas)
    'Range("bons1").Offset(i, 0) = bons
    Stminus1 = S
    'Range("stminus1").Offset(i, 0) = Stminus1

    eps = Application.NormSInv(Rnd)
    'eps = Range("eps1").Offset(i, 0)

    'Range("eps").Offset(i + 1, 0) = eps


    S = S + (r * S * dt) + (sigma * S * eps * Sqr(dt))

    Range("pactions").Offset(i, 0) = S

    mult = S / Stminus1
    'Range("mult").Offset(i, 0) = mult


    act = act * mult
    'Range("act1").Offset(i, 0) = act


    rep = act - bons

    'Range("rep1").Offset(i, 0) = rep


'    Début de la semaine 1)

    dur = i * dt
    Tstar = T - dur
    num = Log(S / X) + ((r + 0.5 * sigma ^ 2) * (Tstar))

    done = num / (sigma * Sqr(Tstar))
    Ndone = Application.WorksheetFunction.NormSDist(done)
    Range("done").Offset(i, 0) = done
    Range("Ndone").Offset(i, 0) = Ndone


    act = Ndone * S

    bons = act - rep

    Range("act").Offset(i, 0) = act
    Range("bons").Offset(i, 0) = bons
    Range("rep").Offset(i, 0) = rep


    ' On est à la fin de la semaine 1

    Next i


    For i = pas To pas


      bons = bons * Exp(r / pas)
    'Range("bons1").Offset(i, 0) = bons
    Stminus1 = S
    'Range("stminus1").Offset(i, 0) = Stminus1

    eps = Application.NormSInv(Rnd)
    'eps = Range("eps1").Offset(i, 0)

    'Range("eps").Offset(i + 1, 0) = eps


    S = S + (r * S * dt) + (sigma * S * eps * Sqr(dt))

    'S = S * Exp(mu * dt + sigma * eps * Sqr(dt))

    Range("pactions").Offset(i, 0) = S

    mult = S / Stminus1
    'Range("mult").Offset(i, 0) = mult


    act = act * mult
    'Range("act1").Offset(i, 0) = act


    rep = act - bons

    Range("rep").Offset(i, 0) = rep

  Next i



  End Sub
```

***Tableau 5*** *Un scénario d'un portefeuille dupliquant un call*

| Semaine | prix du call | S | d1 | N(d1) | act | bons | rep |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9.77309215 | 100 | 0.54166667 | 0.70597592 | 70.5975922 | 60.8245 | 9.77309215 |
| 1 | | 101.258764 | 0.62064052 | 0.73258191 | 74.1803392 | 63.600524 | 10.5798152 |
| 2 | | 101.571751 | 0.63717532 | 0.73799467 | 74.9594112 | 64.2359813 | 10.7234299 |
| 3 | | 102.132445 | 0.67072023 | 0.74880061 | 76.4768376 | 65.4261481 | 11.0506895 |
| 4 | | 101.091558 | 0.59574809 | 0.72432824 | 73.22347 | 63.0403304 | 10.1831396 |
| 5 | | 100.136681 | 0.52454495 | 0.70005022 | 70.1007055 | 60.6941293 | 9.40657624 |
| 6 | | 101.843182 | 0.6389168 | 0.73856147 | 75.2174504 | 64.6979965 | 10.5194539 |
| 7 | | 97.3264485 | 0.30968451 | 0.62159956 | 60.4980774 | 53.4016612 | 7.09641629 |
| 8 | | 98.8920994 | 0.41751843 | 0.66185038 | 65.4517733 | 57.4540844 | 7.99768893 |
| 9 | | 100.865414 | 0.55573871 | 0.71080525 | 71.6956662 | 62.4693324 | 9.22633386 |
| 10 | | 102.156374 | 0.6450642 | 0.74055721 | 75.6526387 | 65.592834 | 10.0598047 |
| 11 | | 98.6990872 | 0.38266275 | 0.64901508 | 64.057196 | 56.6460671 | 7.4111289 |
| 12 | | 98.3860597 | 0.35139399 | 0.63735361 | 62.7067099 | 55.5750463 | 7.13166361 |
| 13 | | 100.753673 | 0.52689736 | 0.70086757 | 70.6149818 | 62.049174 | 8.56580781 |
| 14 | | 102.582897 | 0.66191723 | 0.74598786 | 76.5255959 | 66.7613289 | 9.764267 |
| 15 | | 102.032817 | 0.61595951 | 0.73103938 | 74.5900069 | 65.3260243 | 9.2639826 |
| 16 | | 105.934934 | 0.91264426 | 0.81928516 | 86.7909198 | 74.762334 | 12.0285858 |
| 17 | | 108.57475 | 1.11290494 | 0.86712537 | 94.1479206 | 80.0572817 | 14.090639 |
| 18 | | 105.136295 | 0.85094737 | 0.80260071 | 84.3824644 | 73.3812395 | 11.0012249 |
| 19 | | 108.865697 | 1.14237666 | 0.87335126 | 95.0779934 | 81.1823965 | 13.8955969 |
| 20 | | 108.224781 | 1.09663066 | 0.86359856 | 93.4627648 | 80.2362707 | 13.226494 |
| 21 | | 108.51089 | 1.12348286 | 0.86938376 | 94.3376058 | 80.9721111 | 13.3654947 |
| 22 | | 110.303265 | 1.27213458 | 0.89833735 | 99.0895421 | 84.2748605 | 14.8146816 |
| 23 | | 106.753598 | 0.98792585 | 0.83840552 | 89.5028061 | 77.9904454 | 11.5123607 |
| 24 | | 107.416646 | 1.04747044 | 0.85255867 | 91.5789928 | 79.6157873 | 11.9632055 |
| 25 | | 107.38576 | 1.04957508 | 0.85304324 | 91.6046968 | 79.7750705 | 11.8296263 |
| 26 | | 106.347131 | 0.96320558 | 0.83227782 | 88.5103582 | 77.6741892 | 10.836169 |
| 27 | | 107.181746 | 1.04242033 | 0.85139158 | 91.2536358 | 79.8274672 | 11.4261686 |
| 28 | | 108.172007 | 1.13883035 | 0.87261304 | 94.3923037 | 82.2305677 | 12.161736 |
| 29 | | 106.896236 | 1.02873514 | 0.84819792 | 90.6691656 | 79.7314532 | 10.9377124 |
| 30 | | 105.739794 | 0.92435493 | 0.82234922 | 86.9550376 | 77.1056202 | 9.84941741 |
| 31 | | 107.979119 | 1.14956296 | 0.87483804 | 94.4642403 | 82.877182 | 11.5870583 |
| 32 | | 110.220193 | 1.38197777 | 0.91651074 | 101.01799 | 87.5819955 | 13.435995 |
| 33 | | 110.885328 | 1.46700177 | 0.92881221 | 102.991647 | 89.0640269 | 13.9276199 |
| 34 | | 116.108796 | 2.01108116 | 0.97784156 | 113.536006 | 94.8767397 | 18.6592659 |
| 35 | | 119.517699 | 2.3885608 | 0.99154275 | 118.506907 | 96.6420788 | 21.8648286 |
| 36 | | 117.815969 | 2.27094009 | 0.9884247 | 116.452214 | 96.4049057 | 20.0473079 |
| 37 | | 119.225423 | 2.47363574 | 0.9933127 | 118.428127 | 97.1175432 | 21.3105838 |
| 38 | | 124.479461 | 3.09446103 | 0.99901415 | 124.356743 | 97.9580792 | 26.3986637 |
| 39 | | 122.850781 | 3.0148369 | 0.99871441 | 122.692845 | 98.0532121 | 24.6396331 |
| 40 | | 123.233394 | 3.15941229 | 0.99920956 | 123.135986 | 98.2463146 | 24.8896712 |
| 41 | | 120.205102 | 2.9166094 | 0.99823071 | 119.992424 | 98.260995 | 21.7314291 |
| 42 | | 128.482976 | 4.04764143 | 0.99997413 | 128.479653 | 98.6173589 | 29.8622936 |
| 43 | | 129.8774 | 4.41452875 | 0.99999494 | 129.876743 | 98.7529048 | 31.1238383 |
| 44 | | 124.238723 | 3.90133998 | 0.99995217 | 124.232781 | 98.8806173 | 25.3521634 |
| 45 | | 124.895923 | 4.23818081 | 0.99998873 | 124.894515 | 99.0183821 | 25.8761334 |
| 46 | | 121.735364 | 4.04405064 | 0.99997373 | 121.732166 | 99.1499397 | 22.5822265 |
| 47 | | 118.697172 | 3.85306677 | 0.99994168 | 118.690249 | 99.2796957 | 19.4105537 |
| 48 | | 120.92514 | 4.71729871 | 0.99999881 | 120.924995 | 99.4203397 | 21.5046556 |
| 49 | | 119.655197 | 5.11067227 | 0.99999984 | 119.655178 | 99.5543887 | 20.1007895 |
| 50 | | 115.613411 | 5.03806175 | 0.99999976 | 115.613384 | 99.6884859 | 15.9248984 |
| 51 | | 114.478579 | 6.57556596 | 1 | 114.478579 | 99.8227992 | 14.6557802 |
| 52 | | 113.917809 | | | | | 13.9605429 |

Comme en prend acte la figure 8, le payoff du portefeuille dupliquant évolue au diapason du prix de l'action. C'est en effet là le principe même de la duplication. La sensibilité du portefeuille dupliquant au prix de l'action doit être identique à celle du call. Or, cette sensibilité, mesurée par $N(d_1)$, a tendance à augmenter quand le prix de l'action augmente et vice-versa comme en fait foi la figure 9. C'est ce qui explique la forte corrélation entre le payoff du portefeuille dupliquant et le prix de l'action.

***Figure 8***

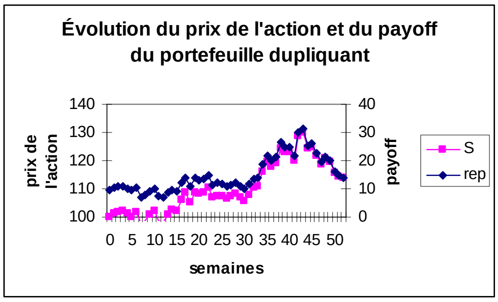
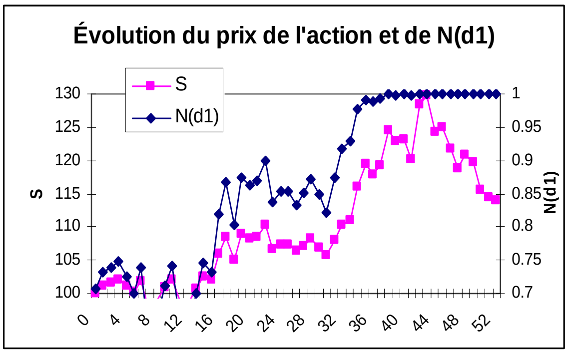


***Figure 9***




## 3. La technique du coussin[9]

En 1988[10], Black a proposé une technique d'assurance de portefeuille à proportion constante (CPPI[11]). Cette technique est simpliste et ne fait pas appel aux options pour sa mise en oeuvre.

Supposons qu'un investisseur dispose d'un montant $P_0$ pour fins de placement. Il établit d'abord le plancher de son placement à l'échéance, que nous désignons par $F_T$. Il en résulte un coussin *c* qui est égal à : $\left(P_0 - F_T e^{-rT}\right)$. L'exposition au risque est déterminée par la proportion d'actifs risqués dans le portefeuille. Cette exposition est déterminée par le produit d'un multiple m et du coussin c. On a :

$$E = m \times c$$

avec E, l'exposition au risque qui se confond avec la valeur des actifs risqués dans le portefeuille. Plus m est important, plus la valeur du portefeuille risque de fluctuer. Mais la valeur du portefeuille ne saurait tomber en deçà du plancher lors de l'échéance du placement. Si la valeur du portefeuille se situe effectivement au niveau plancher à

[9] On retrouvera un bon exposé de la technique du CPPI dans Das (1997), chapitre 14, dont nous nous inspirons.
[10] Nous nous référons ici à l'article de Black et Jones paru en 1988. Mais Black a publié d'autres articles sur le sujet avec d'autres co-auteurs.
[11] CPPI est l'acronyme anglais de : *constant **p**roportion **p**ortfolio **i**nsurance.*

l'échéance du placement, alors tout le portefeuille sera investi en obligations à coupon zéro.

Voici comment se présente l'algorithme de la technique du CPPI. A la semaine 0, l'investisseur fixe $F_T$ et calcule son coussin. Il détermine ensuite le montant d'actif risqué dans son portefeuille par l'équation : E = mc. Le reliquat du portefeuille est alloué aux obligations à coupon zéro : $B_0 = P_0 - E_0$, avec $P_0$ la valeur initiale du portefeuille.

A la semaine 1, le prix de l'actif risqué s'est modifié de $S_0$ à $S_1$. La valeur du portefeuille a donc subi le changement suivant : $P_1 = E_0\left(\frac{S_1}{S_0}\right) + B_0 e^{\frac{r}{52}}$. Le gestionnaire recalcule donc son coussin et refait les calculs précédents. Et la boucle tourne jusqu'à la fin de la 52$^{\text{ième}}$ semaine, qui représente l'horizon du placement.

Au tableau 6, on retrouve un programme écrit en Visual Basic qui simule un portefeuille CPPI. Le portefeuille a au départ une valeur de 100 $ et dans la première simulation, on fixe le plancher à 100$, c'est-à-dire que l'on exclut toute perte de capital à l'échéance du placement. Notre investisseur veut en effet préserver à tout le moins son capital. Le prix de l'actif risqué est également fixé initialement à 100$ et évolue selon un mouvement brownien géométrique. La figure 10 met l'évolution du portefeuille en rapport avec celle du prix de l'action.

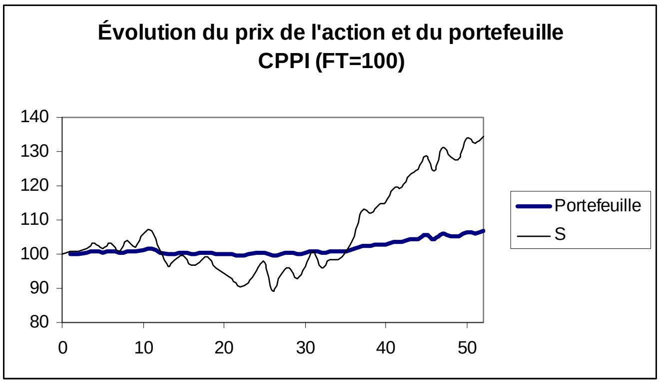
***Tableau 6** Programme Visual Basic de la simulation d'un portefeuille CPPI*

```
Sub coussin()

port = 100
s = 100
T = 1
m = 5
r = 0.03
mu = 0.1
sigma = 0.2
pas = 52
dt = T / pas
```

```
FT = 80

'Range("prix").Offset(0, 0) = S

For i = 1 To pas

cushion = port - (FT * Exp(-r * (T - i * dt)))
Range("cushion").Offset(i, 0) = cushion

exposure = cushion * m
Range("exposure").Offset(i, 0) = exposure
cash = port - exposure
Range("cash").Offset(i, 0) = cash

Sminus1 = s

 eps = Application.NormSInv(Rnd)

 S = S + (mu * S * dt) + (sigma * S * eps * Sqr(dt))

 Range("prix").Offset(i, 0) = S

port = (exposure * (s / Sminus1)) + (cash * Exp(r / 52))

Range("portfolio").Offset(i, 0) = port

Next i


End Sub
```

---

***Figure 10***




Le scénario du prix de l’action que renferme la figure 10 est optimiste en ce sens que le prix de l’action enregistre une forte appréciation à partir de la semaine 30, ce jusqu’à la semaine 52 qui tient lieu d’horizon d’investissement. Plutôt stable à son niveau initial au début, le portefeuille CPPI s’apprécie quelque peu à la suite de l’escalade du prix de l’action mais cette hausse s’avère toutefois timide. C’est que nous avons fixé le plancher à un niveau élevé dans cette simulation. En effet, nous désirons que l’investisseur préserve son capital initial, ce qui diminue de beaucoup la sensibilité du portefeuille à l'évolution du prix de l'action. En fait, à la fin de simulation, le portefeuille ne comprend que 28% d'actions en dépit de la hausse marquée du prix de l'action.

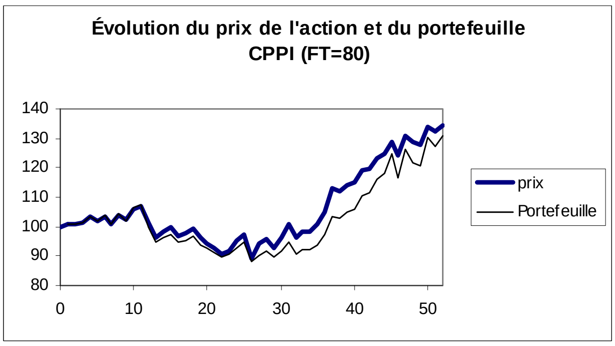
Nous avons régressé la valeur simulée du portefeuille CPPI, désigné par $\Pi_t$ , sur le prix simulé de l'action ($S_t$). Nous avons obtenu le résultat suivant :

$$\Pi_t = \underset{(206,2)}{85{,}04} + \underset{(40,66)}{0{,}16}\, S_t$$

avec, entre parenthèses, les statistiques t des coefficients. Le $R^2$ de la régression est de 0,97. Comme on peut le constater, la sensibilité du portefeuille au prix de l'action, à hauteur de 0,16, est très modérée en raison du niveau important auquel a été fixé le plancher du portefeuille. Le niveau de la constante, qui est relativement rapproché de la valeur initiale du portefeuille, reflète la relative stabilité du portefeuille.

Pour donner à notre gestionnaire davantage de marge de manœuvre, nous abaissons le plancher à 80$ dans le scénario précédent tout en conservant le même scénario du prix de l'action. L'évolution du portefeuille correspondant en fonction du prix de l'action s'observe à la figure 11.

***Figure 11***



Comme on peut le constater, l'abaissement du plancher donne lieu à une plus grande sensibilité du portefeuille au prix de l'action. La valeur du portefeuille vient se situer en deçà du niveau du plancher précédent dans la première partie du scénario mais se relève rapidement par la suite dans la foulée de la remontée rapide du prix de l'action. En fait, le portefeuille final comporte un levier puisqu'il est composé de 181% d'actions et de -81% de numéraire, ce qui constitue l'emprunt effectué par le gestionnaire de façon à exercer un effet de levier sur son portefeuille d'actions.

Pour juger de la sensibilité du portefeuille au prix de l'action, nous avons régressé une fois de plus le portefeuille simulé sur le prix simulé de l'action. Nous avons obtenu comme résultat :

$$\Pi_t = \underset{(2,8)}{8,82} + \underset{(29,9)}{0,88}\, S_t$$

Le $R^2$ de la régression se situe à 0,94. L'abaissement du plancher se traduit donc par une plus grande sensibilité du portefeuille au prix de l'action. Le coefficient rattaché à $S_t$ passe en effet de 0,16 à 0,88 lorsque le plancher est abaissé de 100 $ à 80$. La constante a également diminué sensiblement et s'avère également moins significative, ce qui prend acte des plus grandes fluctuations enregistrées par le portefeuille quand le plancher dudit portefeuille est fixé à un plus faible niveau.

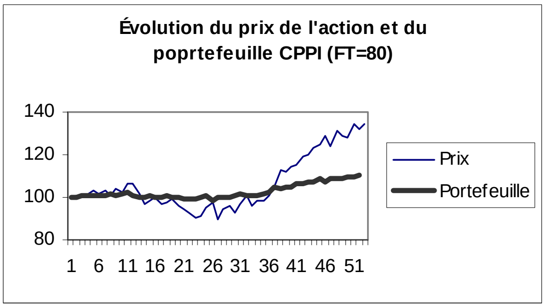
Le lecteur averti peut se demander si la valeur du portefeuille n'est pas également sensible à $S_{t-1}$, soit le prix de l'action décalé d'une semaine, du fait que le gestionnaire réagit avec délai. Nous avons donc refait la régression précédente mais en introduisant $S_{t-1}$ au lieu de $S_t$ dans la régression. Nous obtenons :

$$\Pi_t = \underset{(1,64)}{7,41} + \underset{(21,27)}{0,90}\, S_{t-1}$$

Le $R^2$ de la régression est de 0,90. Comme l'indique cette régression, le portefeuille est plus sensible à $S_{t-1}$ qu'à $S_t$, du fait que le gestionnaire réagit avec délai. La constante n'est également plus significative au seuil de confiance de 95%.

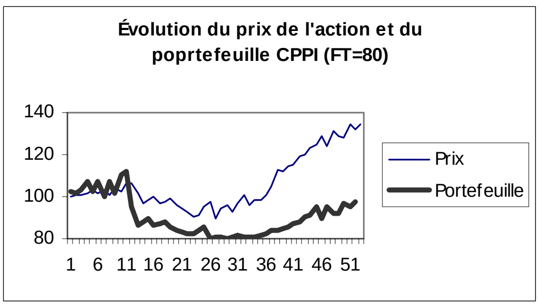
Nous n'avons guère analysé jusqu'ici le rôle du multiple *m* dans le modèle CPPI. Pour mieux le visualiser, nous reprenons la dernière simulation de cette section mais en abaissant *m* de 5 à 1, cela toujours en retenant le même scénario du prix de l'action. Le résultat se lit à la figure 12.

***Figure 12** Simulation avec un multiple de 1*




La figure 12 révèle qu'une diminution de *m* a le même impact sur le portefeuille qu'un relèvement du plancher : la sensibilité du portefeuille au prix de l'action s'en voit réduite. Le multiple est donc un facteur de risque additionnel dans le modèle de Black. Plus il est important, plus l'aversion pour le risque du gestionnaire est faible et plus son portefeuille réagira aux fluctuations du marché. Pour le constater, fixons le multiple à 10 plutôt qu'à 5 comme dans la simulation précédente (figure 13).

***Figure 13** Simulation avec un multiple de 10*



À la figure 13, le gestionnaire a pris davantage de risque qu'à la figure 11 puisque *m* est égal à 10 dans le premier cas et à 5 dans le second. Mais son degré d'aversion pour le risque l'a moins servi parce que, d'une part, son portefeuille a heurté le plancher de 80$ au milieu de la période et que, de l'autre, son portefeuille a terminé la période avec une valeur de 97,31 $ plutôt que de 130,91$ lorsque le multiple est de 5. C'est bien là l'essence de la prise de risque.

***Résumé et conclusion***

L'assurance de portefeuille vise la protection du capital. Mais, comme toute forme d'assurance, elle comporte un coût. Ce coût peut représenter le paiement d'une prime ou être constitué d'une moindre participation aux fluctuations du marché, donc par une espérance de rendement plus faible. Rendement assuré et espérance de rendement plus faible vont donc de pair.

Pour bien maîtriser le principe de l'assurance de portefeuille, nous nous sommes attachés dans ce chapitre à montrer comment reproduire une position donnée par un *protective put*. Pour y arriver, nous avons pu constater qu'il faut en tout temps que le delta du portefeuille dupliquant soit égal à celui du portefeuille représenté par le *protective put*. Les flux monétaires des deux portefeuilles sont alors quasi-identiques quand le pas de la simulation s'avère suffisamment faible.

Nous avons finalement examiné un modèle qui ne fait pas appel aux options : le modèle CPPI de Black et Jones (1988). Ce modèle repose sur deux paramètres : le plancher du portefeuille et le multiple. Plus le plancher est faible et plus le multiple est important, plus le risque du portefeuille est élevé. La valeur de ces deux paramètres est déterminée par le degré d'aversion pour le risque du gestionnaire. Une fois le plancher fixé, une valeur plus élevée pour le multiple se traduira par une plus grande sensibilité du portefeuille aux fluctuations du marché. Comme cette sensibilité joue à la hausse comme à la baisse, le rendement espéré du portefeuille est plus élevé avec un multiple important, ce qui n’est pas nécessairement le cas pour le rendement réalisé. C’est là l’essence même du risque.

**Bibliographie**


Benninga, S. (2000) *Financial Modeling*, MIT Press, Cambridge.

Black, F. et Jones, R. (1988), Simplifying portfolio insurance for corporate pension plans, *Journal of Portfolio Management*, 14, 33-37.

Black, F. et Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, p. 637-659.

Brown, K.C.(1994), *Derivatives Strategies for Managing Portfolio Risk*, AIMR.

Clarke, R.G. (1992), *Options and Futures: A Tutorial*, AIMR.

Das, S. (1997) *Risk Management and Financial Derivatives*, McGraw Hill.

Jackson, M. et Staunton, M.(2001), Advanced Modelling in Finance using Excel and VBA, John Wiley & Sons.

Tian, Y.(1996), A Reexamination of Portfolio Insurance: The Use of Index Put Options, *Journal of Futures Markets*, 16, 163-188.